সরল প্রবেশিকা-জ্যামিতি

কলিকাতা বিশ্ববিদ্যালয় ও বঙ্গীয় গবর্ণমেণ্টের শিক্ষাবিভাগ কর্তৃক ৭ম-১০ম শ্রেণীর পাঠ্যরূপে অনুমোদিত। ২৫।১১।৩৭ তারিখের কলিকাতা গেজেট দ্রষ্টব্য

সরল প্রবেশিকা-জ্যামিতি

(১ম—৪র্থ খণ্ড)

কলিকাতা বিশ্ববিদ্যালয়ের গণিতাধ্যাপক,
ঢাকা বিশ্ববিদ্যালয় ও বাঁকুড়া কলেজের ভূতপূর্ব গণিতাধ্যাপক,

ডক্টর শ্রীক্ষেত্রমোহন বসু ডি. এস্‌সি. এম. এ.

ও

ভবানীপুর (কলিকাতা) মিত্র ইনষ্টিটিউসনের গণিতশিক্ষক,
শিবপুর (হাওড়া) দীনবন্ধু ইনষ্টিটিউসনের ভূতপূর্ব গণিতশিক্ষক,

শ্রীবীরেন্দ্রনাথ রায় বি এ

কর্তৃক

কলিকাতা বিশ্ববিদ্যালযেব বাঙ্গালা পবিভাষানুসারে
প্রবেশিকা-পবীক্ষাব নূতন পাঠ্যতালিকানুযায়ী লিখিত

"The world owes its first lessons in Geometry, not to Greece, but to India"—R. C. Dutt.

মডার্ণ বুক্ এজেন্সী
১০, কলেজ স্কোযাব, কলিকাতা
১৯৩৮

মূল্য দেড় টাকা

প্রকাশক :
শ্রীউপেন্দ্রচন্দ্র ভট্টাচার্য্য
৩০, কলেজ স্কোয়ার, কলিকাতা।

প্রথম সংস্করণ—এপ্রিল, ১৯৩৭
দ্বিতীয় সংস্করণ—নভেম্বর ১৯৩৮

মুদ্রাকর :
শ্রীনির্মলচন্দ্র সেন
সখা প্রেস, কলিকাতা

বাঙ্গালার

স্বাধীনচিন্তার পরিশীলনে অগ্রদূত, মাতৃভাষার যুগপ্রবর্তক,
বিদ্যোৎসাহী, শ্রেষ্ঠ গণিতজ্ঞ ও ক্ষেত্রতত্ত্ববিৎ, কর্মযোগী,
ছাত্রবান্ধব, গুণগ্রাহী, কল্যাণকামী, স্বাদেশিকতার
ঋত্বিক্, আত্মসম্মানসচেতন, অতিমানুষিক
মনীষার অবতার, বিবিধপ্রতিষ্ঠানস্রষ্টা,
প্রজ্ঞান-প্রতিভায় সমুজ্জ্বল, মনুষ্যত্ব-
মহিমায় মহিমান্বিত, দেশগৌরব,
বুধাগ্রগণ্য, অশেষগুণসাগর,
মহাতেজস্বিপুরুষ,

সার **আশুতোষ মুখোপধ্যায়** কে. টি.

এম. এ., ডি. এল., ডি. এস্‌সি.,

সরস্বতী, শাস্ত্রবাচস্পতি, সম্বুদ্ধাগমচক্রবর্ত্তী

মহোদয়ের

পবিত্র-স্মৃতি-উদ্দেশে

এই ক্ষুদ্র পুস্তকখানি

উৎসর্গীকৃত

হইল

সূচী

প্রথম খণ্ড

রেখা, কোণ, ঋজুরেখক্ষেত্র

দ্বিতীয় খণ্ড

ক্ষেত্রফল

তৃতীয় খণ্ড

বৃত্ত, বৃত্তাঙ্কন, বিবিধবৃত্ত

চতুর্থ খণ্ড

বৈজিকসূত্র, ক্ষেত্রাঙ্কন, বৃত্রাঙ্কন

পূর্বভাষ

ভূমিকা লিখিবার যে ধারাটি চলিয়া আসিতেছে এখানে তাহার একটু অন্যথাচরণ করিতেছি ; এজন্য পাঠক-পাঠিকার নিকট আমরা ক্ষমাপ্রার্থী। আমাদের বক্তব্য এই যে, যদি বিষয়বস্তুর মোটামুটি পরিচয় ও সেই সঙ্গে একটি সংক্ষিপ্ত ইতিহাস দেওয়া যায়, তাহা হইলে তাহা শিক্ষক ও শিক্ষার্থীর চিত্তাকর্ষক হওয়াই স্বাভাবিক। এই ধারণার বশবর্তী হইয়া আমরা গতানুগতিকতা বর্জন করিলাম। এই ভূমিকার শেষভাগে এই গ্রন্থের বিষয়-বিন্যাসের বিশেষত্বটুকু বিবৃত হইয়াছে।

সওয়া তেইশ শত বৎসর পূর্বে এথেন্সে প্লেটোর বিদ্যামন্দির 'য়্যাকাডেমি'র পত্তন হয় ; তাহার প্রবেশদ্বারে ধাতুফলকে উত্‌কীর্ণ হয় এই লিপিটি—

'জ্যামিতিতে অনভিজ্ঞ ব্যক্তির হেথায় প্রবেশ নিষেধ—'।

প্লেটোর মতে উচ্চতর বিজ্ঞানে প্রবেশ করিবার সোপানস্বরূপ হইল জ্যামিতি ; সূচীচ্ছেদের তিনিই আবিষ্কর্তা এবং জ্যামিতির বিশ্লেষণ-প্রণালীর তিনিই প্রবর্তক। শুধু তাহাই নয়, প্লেটো ছিলেন অনবদ্য-রূপ-সাধনার ঋত্বিক্‌। তিনি জানাইতে চাহিয়াছিলেন যে, জ্ঞানানুশীলনের ধাপে-ধাপে যে মানসিক সুশিক্ষার (mental discipline) প্রয়োজন হয়, তাহার গাঁথুনি সুরু করিতে হইবে জ্যামিতির পাথর দিয়া। ইহা ব্যতীত ভাবনাত্মক ছবিকে যুক্তির বেদীতে প্রতিষ্ঠিত করিবার দ্বিতীয় পন্থা নাই। দার্শনিক, বৈজ্ঞানিক, চিত্রশিল্পী, ভাস্কর, স্থপতি, রূপাদর্শে প্রণোদিত হইয়া ভাবের প্রতিরূপ গড়িতেছেন। ব্যবহারিক জগতে 'কল্পনা-সিদ্ধান্তে'র বালাই নাই বটে, কিন্তু জ্যামিতির অকাট্য যুক্তিশৃঙ্খল, ছেলেমেয়েদের তর্ক-সমিতি হইতে আরম্ভ করিয়া ব্যবস্থাপরিষত্‌ পর্যন্ত একটি অবাধ শাসনযন্ত্র চালাইয়া আসিতেছে।

বস্তু ইন্দ্রিয়ের পর্দায় যে রূপটি লইয়া আঘাত করে, তাহা হইতে নিখুঁত রূপ সৃষ্টি করে মানুষের মন। কেহ কেহ বলেন যে, জ্যামিতি হইল

অমূর্ত বস্তুবিদ্যা (abstract science) এবং এরূপ সব সত্যের উপর প্রতিষ্ঠিত যাহা মানুষের পর্যবেক্ষণ ও অভিজ্ঞতার অপেক্ষা রাখে না। আসলে কিন্তু তাহা নয়। কেন না, মানুষ জ্ঞানার্জন করে ইন্দ্রিয়ের দ্বার দিয়াই—মূর্তকে, বিশেষকে (particulars) আঁকড়াইয়া ধরিয়া; তাহা হইতে, সে জ্ঞান মনের ক্ষেত্রে বিম্বিত হইয়া সামান্যীকরণের (generalisation) ছাঁচে ঢালাই হইয়া যায়। ফলে, কোন অমূর্ত প্রত্যয়ে (concept) হয় তাহার পরিণতি। জ্যামিতির সংজ্ঞা বিশদরূপে আয়ত্ত করা মানে—বাস্তবের বিশেষ হইতে রূপ ছাঁকিয়া লইয়া একটি অবাস্তব আদর্শের মঞ্চে দাঁড়ান। ত্রিভুজ বা বৃত্তের যাহা সর্বাঙ্গসম্পূর্ণ অবাস্তব রূপ, মানুষ তাহা সহজাত কল্পনায় (à priori) প্রকাশ করিতে পারিত না, যদি-না ঐ সব চিত্রের অসম্পূর্ণ বাস্তব রূপ সম্বন্ধে তাহার অভিজ্ঞতা জন্মাইত। প্রতীচ্য বিজ্ঞানের অন্তর্গত কোন সংজ্ঞার তখনই পরিবর্তন হয় যখনই কোন আবিষ্ক্রিয়া-লব্ধ অভিনব ধর্ম পূর্বপ্রত্যয়কে উল্টাইয়া দেয়। জ্যামিতির তাহা হয় না। এজন্য জ্যামিতি হইল একটি বিশুদ্ধ ঔপপত্তিক বিদ্যা (pure science) এবং জ্যামিতির সংজ্ঞাকে দেশের (space) এক-একটি টুক্‌রা টুক্‌রা ধারণার উপর গোড়াপত্তন করিয়া গড়া হইয়াছে।

দেশের ধারণার গোড়াপত্তন হয় মাত্রা (dimensions) হইতে। দৈর্ঘ্য-প্রস্থ-বেধ রৈখিক মাপকাঠিতে পর্যবসিত হয়। ঘনবস্তুর ধারণা দানা বাঁধিয়া গড়িয়া উঠে পৃথিবীর সেরা আশ্চর্য গিজের পিরামিড। সে প্রায় সাত হাজার বৎসর পূর্বে। ঐতিহাসিক হিরোডোটস্ বলেন, "১৪১৬—১৩৫৭ পূর্ব-খৃষ্টাব্দে সেসোস্‌ট্রিস্ (Sesostris) এর রাজত্বকালে ঈজিপ্টে এই বিদ্যার প্রথম উৎপত্তি হয়।" যেমন, আগে ভাষা পরে তাহার ব্যাকরণ, তেমনি জ্যামিতিক বস্তুর ধারণার অনেক পরে জ্যামিতি নামক সায়েন্সের উৎপত্তি। কতদিন পূর্বে নীলনদবিধৌত মিশরে ক্ষেত্র-পরিমিতির সূত্রপাত হয় কে জানে! নিরপেক্ষভাবে, ভারতে কোন্ অতীতযুগে জ্যামিতি-চর্চা সুরু হয় নির্দেশ করাও কঠিন। প্রাচীন বৈদিকগ্রন্থে ক্ষেত্রতত্ত্বের মূলসূত্র প্রকটিত; কল্পসূত্রের

অন্তর্গত শুল্বসূত্রে ক্ষেত্রতত্ত্ব বিধিবদ্ধ আছে; কৃষ্ণযজুর্বেদে (তৈত্তিরীয় সংহিতা ৫।৪।১১।১) শুল্বসূত্রের বীজ দেখা যায়। · অধ্যাপক ডকটর Burnell বলেন—

"We must look to the Sulva-portions of the Kalpasutras for the earlist beginning of Geometry among the Brahmans."—

কলিকাতা বিশ্ববিদ্যালয়ের ডকটর Thibaut বলিলেন, আটাশ শত বৎসর পূর্বে শুল্বসূত্র রচিত হইয়াছিল নানাপ্রকার যজ্ঞ-বেদীর পরিকল্পনা লইয়া। বৌধায়ন, আপস্তম্ব, মানব, মৈত্রায়নীয়, কাত্যায়ন, সূত্র-স্রষ্টা। এই জ্যামিতিক সূত্র-সৃষ্টিতে পৌর্বাপর্য বজায় রাখিতে হইলে গ্রীস্‌কে ভারতের অন্ততঃ দুইশত বৎসর পিছাইয়া ধরিতে হয়। গ্রীসের থেলিস্, পীথাগোরস্, ব্রিসো, য়ান্টিফস্, হিপ্পোক্রেটিস (ভৈষজ্যবিজ্ঞানের জন্মদাতা নন), জেনোডোরস্, দেমোক্রিটস্, ইনোপিডিস্, প্লেটো, য়ুডোক্সস্ (য়ুডোকস্), য়্যারিষ্টটল, থিওফাস্টস্, য়ুডেমস্, নানা সূত্র প্রণয়ন করিবার পর তবে আলেক্‌জান্দ্রিয়ায় য়ুক্লিডের অভ্যুদয়। ঐ আলেকজান্দ্রিয়ার সারস্বতপীঠের প্রতিষ্ঠাতা গ্রীস্‌জয়ী মাকিদন্‌রাজ আলেকজান্দর। য়ুক্লিড পূর্বসঞ্চিত তথ্যগুলিকে সুসংবদ্ধ করিয়া তাঁহার প্রাথমিক জ্যামিতি ["Elements"] এরূপ নিপুণ ভাবে রচনা করিলেন যাহা আজ প্রায় সওয়া দুই হাজার বৎসর ব্যাপিয়া বিশ্বের বুধ-সমাজে প্রচুর সমাদর পাইয়া আসিতেছে। আলেক্‌জান্দ্রিয়ার অন্যান্য পরবর্তী গবেষকের প্রচেষ্টায় জ্যামিতি আরও অগ্রসর হয়। ইহাঁদের মধ্যে আর্কিমিডিস্, য়্যাপোলোনিয়স্, থিওডোরস্, থিঅন্, য়্যারিষ্টার্কস্, হিপার্কস্, টোলেমি, পাপ্পাস্, ডাইয়োফাণ্টস্, য়ুটোসিয়স্, প্রোকসের নাম উল্লেখযোগ্য। এখানে বক্তব্য এই যে, টোলেমি প্রমুখাৎ জ্যামিতিবিদ্‌গণ যখন চর্চা করেন তখন আলেকজান্দ্রিয়া রোমের অধীনে গিয়াছে। রোমকরাজ্যের প্রাধান্যকালে এক বোয়েথিয়স্ (Boethius) ব্যতীত অপর কেহ জ্যামিতির ধার ধারিতেন না, তবে তিনি স্বাধীন-চিন্তার অবসর পান নাই, মাত্র অনুবাদ-কার্য কিছু কিছু করিয়াছিলেন।

এদিকে আমাদের ভারতবর্ষে ব্রহ্মগুপ্ত (আনুঃ ৬২৮ ঈশাব্দ) ও ভাস্করাচার্যের (আনুঃ ১১৫০ ঈশাব্দ) প্রতিভায় জ্যামিতিশাস্ত্রে অনেক মূলতত্ত্ব

ও ক্ষেত্রব্যবহার বিষয়ক সূত্র প্রণীত হইল। ভাস্করাচার্যের 'লীলাবতী'র টীকাকার মুনীশ্বরগণক অনেক ক্ষেত্রবিষয়ক অঙ্কন-প্রক্রিয়া দেখাইলেন। কিন্তু ওদিকে প্রতীচ্যে ভাঙ্গনের পালা দেখা দিয়াছে। ঈশীয় সপ্তম শতাব্দীর মধ্যভাগে সারাসেনগণ ঈজিপ্ট জয় করিবার পর আলেজান্দ্রিয়ার বিদ্যাপীঠ ধ্বংস করিয়া ফেলে; গ্রীসীয় জ্ঞান-বিজ্ঞানের প্রগতি ভঙ্গ হইল বটে, কিন্তু তাহারাও অচিরে ঐ সব বিদ্যার চর্চা আরম্ভ করে। অনেক প্রাচীন হস্তলিপি ধ্বংসের মুখ হইতে নিষ্কৃতি পাইয়া আরবীভাষাতেই অনূদিত হয়। বোগ্‌দাদ্‌ নগরে পাশ্চাত্য গণিত শিক্ষা দিবার জন্য কয়েকটি প্রতিষ্ঠান নির্মিত হইল। নবম হইতে চতুর্দশ শতাব্দী পর্যন্ত আরবীয়গণ জ্যামিতিতে (এবং জ্যোতির্বিদ্যায়) বহু উন্নতিলাভ করে। স্পেন্‌ ও ইতালীর লোকেরা এই সারাসেন-সংস্কৃতি দ্বারা ক্রমে ক্রমে প্রভাবান্বিত হইতে লাগিল। ইংলণ্ডও বাদ যায় নাই। দ্বাদশ শতাব্দীর মধ্যভাগে ইংলেণ্ডের প্রথম হেন্‌রীর রাজত্বকালে য়ুক্লিডের জ্যামিতি আরবী হইতে লাটিনে ভাষান্তরিত হইল; এখনও ট্রিনিটি কলেজের গ্রন্থাগারে ঐ প্রাচীন পাণ্ডুলিপি সংরক্ষিত আছে। অনুবাদক হইলেন Adelard নামক খ্রীষ্টান্‌ সংন্যাসী। গ্রীক্‌ ভাষায় ঐ পুস্তকের অনেকগুলি হস্তলিপি ছিল। পঞ্চদশ শতাব্দীর মধ্যভাগে য়ুরোপে সাহিত্য ও বিজ্ঞানের নবজাগরণ হইলে মুদ্রাঙ্কন-যন্ত্রের আবিষ্কার হয়। যে সমস্ত অনুবাদ মুদ্রিত হয় নিম্নে তাহার বিবরণ দেওয়া গেল।* এখানে জ্ঞাতব্য এই যে, গ্রীসীয় জ্যামিতিতে নক্‌সা (diagrams) ও সাধারণ ভাষা ব্যতীত অপর কিছুই ব্যবহৃত হইত না; অধ্যক্ষ বারোই (ট্রিনিটি কলেজের) সর্বপ্রথম তাঁহার পুস্তকে চিহ্ন (symbols) প্রয়োগ করেন। তাঁহার উদ্দেশ্য ছিল—

"to content the desires of those who are delighted more with symbolical than verbal demonstrations."—

* (১) সমগ্র য়ুক্লিডের সংস্করণ: ১৫০৫ খৃষ্টাব্দে লাটিন অনুবাদ, অনুবাদকর্তা—বারথল্‌মিউ জ্যামবার্টি। ১৭০৩ অব্দে অক্সফোর্ড-যন্ত্রে David Gregory কর্তৃক মুদ্রিত ইংরাজী (?) অনুবাদ।

ঈশীয় ষোড়শ শতাব্দীতে সর্বত্রই যুক্লিডের জ্যামিতির এরূপ সমাদর বৃদ্ধি পাইল যে, কেহ তাহার উত্কর্ষ সাধনে চেষ্টা করিল না। কেপলার-ই প্রথম অসীমত্বের নিয়ম প্রবর্তন করিলেন এবং দার্শনিক দেকার্ট বৈজিক জ্যামিতি আবিষ্কার করিলেন। প্লেফেয়ার ও সিম্সন্ এই দুই-জনের মধ্যে শেষোক্ত অনুবাদক গ্লাস্গো বিশ্ববিদ্যালয়ের গণিতাধ্যাপক ছিলেন; ইনি ১৭৫৬ অব্দে লাটিন ও ইংরাজীতে উক্ত জ্যামিতির ছয় ভাগ এবং একাদশ ও দ্বাদশ ভাগ প্রকাশ করেন। এই শেষোক্ত পুস্তক-ই উত্কৃষ্ট বিবেচনায় কেমব্রিজের বিশ্ববিদ্যালয়ে পাঠ্যরূপে নির্বাচিত হইল। তাহার পর, কেম্ব্রিজের অধ্যাপক রবার্ট পটস্ ১৮৪৫ অব্দে সিম্সনের পুস্তক হইতে মাল্মস্লা লইয়া একখানি ইংরাজী জ্যামিতি প্রণয়ন করেন। ঈশীয় উনবিংশ শতাব্দীর শেষ পর্যন্ত এই পুস্তক পৃথিবীর নানা বিশ্ববিদ্যালয়ে অবশ্যপাঠ্যরূপে পঠিত হইয়া আসিতেছিল। কিন্তু, বিংশ শতাব্দীর প্রথম হইতেই কেম্ব্রিজের গণিত-পরিষত্ (Mathematical Association) জ্যামিতিকে স্কুলপাঠ্য

---

(২) গ্রীক্ সংস্করণ: ১৫৩৩ অব্দে Proclus এর টীকা সম্বলিত সংস্করণ (বাসল্ নগরে প্রকাশিত); প্যারিস সংস্করণ; বার্লিন সংস্করণ।

(৩) লাটিন সংস্করণ: ১৪৮২ অব্দে ভিনিস নগরে কাম্পনাসের সংস্করণ; ঐ দ্বিতীয় সংস্করণ ১৪৯১ খৃষ্টাব্দে। ১৬৫৫ অব্দে ট্রিনিটি কলেজের অধ্যাপক (পরে অধ্যক্ষ, master) আইজাক্ বারোর সংস্করণ।

(৪) ইংরাজী সংস্করণ: ১৫৭০ অব্দে লণ্ডন শহরে, অনুবাদকর্তা,—হেনরী বিলিংস্লে। পুনরায় ১৬৬১ অব্দে বারোর সংস্করণ।

(৫) ফরাসী সংস্করণ: ১৫৬৪ অব্দে প্যারিসে; পুনঃ সংস্করণ ১৬২৩ অব্দে।

(৬) জার্মানী সংস্করণ: ১৫৬২ অব্দে (১৫৫৫ অব্দে—সপ্তম হইতে নবম ভাগ অনূদিত হয়)।

(৭) ইটালীয় সংস্করণ: ১৫৪৩ অব্দে।

(৮) ওলন্দাজ সংস্করণ: ১৬০৬ অথবা ১৬০৮ খৃষ্টাব্দে।

(৯) সুইজার্লণ্ড সংস্করণ: ১৭৫৩ অব্দে।

(১০) স্পেনীয় সংস্করণ: ১৫৭৩ অব্দে।

করিবার একটি ব্যবস্থা নির্দেশ করেন, তাহাতে য়ুক্লিডের জ্যামিতির কয় ভাগকে ছাঁট-কাট দিয়াও দেখা গেল যে যুক্তি-পরম্পরা অক্ষুন্ন রাখা চলিতে পারে। এই ব্যবস্থাকে কার্যে পরিণত করিতে অনেক সংক্ষিপ্ত জ্যামিতি প্রণীত হইল, এবং গত কয় বৎসর ধরিয়া সেই পদ্ধতি-ই ইংরাজ-শাসিত প্রতি শিক্ষা-কেন্দ্রে অনুসৃত হইয়া আসিতেছে।

কলিকাতা বিশ্ববিদ্যালয়ের প্রবেশিকা-পরীক্ষার পাঠ্য-তালিকায় অনেকটা ঐ প্রণালী-ই বজায় আছে ; এবং, সম্প্রতি ইংরাজীর পরিবর্তে মাতৃভাষা বাঙ্গালাকেই শিক্ষার বাহন করা হইয়াছে। পাঠ্য-তালিকায় বিদেশীর সঙ্গে ঐক্য থাকিলেও রবীন্দ্রনাথের ভাষায়—

'স্বদেশী ভাষার অধিকারে স্বাধীন সঞ্চরণ লাভ করা'—

এইটি শিক্ষাবিধির লক্ষ্য হওয়া সমীচীন। তাই বাঙ্গালার ছেলে-মেয়েরা যাহাতে অল্প প্রয়াসে মর্মগ্রহণ করিতে সমর্থ হয় ও সেই সঙ্গে বিষয়-বস্তুতে প্রবেশ করিয়া স্বাধীন-চিন্তার অবসর পায় এজন্য তাহাদের 'ধাত্' ও মনস্তত্ত্বের দিকে আমরা দৃষ্টি রাখিয়াছি।

জ্যামিতির স্বতঃসিদ্ধ 'সকল সমকোণই সমান', ইহার অনুরূপ 'বৃত্তের ব্যাসার্ধগুলি পরস্পর সমান'-কে আমরা স্বতঃসিদ্ধের মধ্যে ধরিয়াছি ; কারণ, বহু সম্পাদ্য ও উপপাদ্যের যুক্তি সম্পর্কে ইহা ব্যবহৃত হয়। সেইরূপ উপরিপাত (superposition) দ্বারা সমতা প্রতিপন্ন হয়, এজন্য 'সমান সমান বৃত্তগুলির ব্যাসার্ধ পরস্পর সমান'—এই বাক্যকেও স্বতঃসিদ্ধের মধ্যে গণ্য করা যাইতে পারে এবং তাহার ভূরি-ভূরি প্রয়োগও আছে।

জ্যামিতি-তত্ত্বে উপপাদ্য ও সম্পাদ্য দুই-ই আবশ্যক হয় ; তাহার কারণ এই যে, যেরূপ ছবি ফোটাইতে হইলে আলোক ও আঁধার উভয়েরই সমাবেশ অনিবার্য, সেই-রূপ মনের ক্ষেত্রে ক্ষেত্রতত্ত্বের রঙ্ ধরাইতে হইলে যৌক্তিক ও ব্যবহারিক পরিশীলন পরস্পর অনুপূরক। মামুলী প্রথা, যেমন জ্যামিতির একরাশ 'উপপাদ্য'-শেষে 'সম্পাদ্যে'র অধ্যায় আরম্ভ করা, তাহার যথাসম্ভব পরিবর্তন করা হইয়াছে। কারণ, কোন উপপাদ্যের যুক্তি ও সম্পাদ্যের অঙ্কন একই মুখ্য বিষয়ের অধীন হইলে

তাহাদের যতদূর সম্ভব পর-পর দেখান-ই ভাল ; ইহাতে মানসিক সুশিক্ষার দ্রুত প্রসার হইবার সম্ভাবনাই বেশী। আশা করি এই পরিবর্তন সতেজ ও কার্যকরী হইবে।

প্রথম ও দ্বিতীয় ভাগ অপেক্ষাকৃত অল্পবয়স্কদের পাঠ্য বিবেচনায় এবং জ্যামিতিক চিত্রের ভিন্ন ভিন্ন অঙ্গের পরস্পর সম্বন্ধের ধারণা স্পষ্ট হইবে বিবেচনায় অঙ্কন ও চিত্র-মূলক অনুশীলনী অপর দুইভাগ অপেক্ষা অধিক পরিমাণে দেওয়া হইয়াছে। মনে হয়, প্রথম শিক্ষার্থীর পক্ষে ইহা সুফল-প্রসূ-ই হইবে।

মুখ্যতঃ, দুইটি প্রতিজ্ঞার প্রমাণ বিষয়ে পরিবর্তন করা হইয়াছে, যেমন উপপাদ্য ১ ও ২। 'যে কোন যুক্তিমূলক প্রমাণই গ্রাহ্য'—বিশ্ববিদ্যালযের এই নির্দেশ-বচন আমরা মানিয়া লইয়াছি, এবং প্রমাণ-পদ্ধতি যথা-সম্ভব সরল করা হইয়াছে। এই দুই উপপাদ্যের চল্‌তি প্রমাণ-প্রণালীও লিপিবদ্ধ হইল। চতুর্থভাগে ৩৩. সম্পাদ্যের দুইটি প্রমাণ দেওয়া হইয়াছে, কারণ 'স্বীকার' দ্ব্যর্থ-বোধক হওয়ায় ইহা দুই রকমে ধরা যাইতে পারে।

ছাত্রছাত্রীর বোধসৌকর্যার্থ 'ত্রিভুজাঙ্কন', 'সঞ্চারপথ', 'বৃত্তাঙ্কন' 'বিবিধ প্রতিজ্ঞা' অধ্যায়গুলির বিস্তৃত বিবরণ ও বহু প্রশ্নের সমাধান যথাস্থানে সন্নিবেশিত হইয়াছে ; প্রতিজ্ঞাগুলির যুক্তি চিত্রের সাহায্যে যাহাতে সমধিক পরিস্ফুট হয়, এবং জটিলতার গ্রন্থি সরল হইয়া তাহাদের মূলধর্ম সরস ও হৃদয়গ্রাহী হয়, সে বিষয়ে আমরা প্রয়াস পাইয়াছি। এই সম্পর্কে, বহু চিত্রের 'ব্লক্' সংযুক্ত করা হইয়াছে।

কলিকাতা বিশ্ববিদ্যালয়ের প্রবেশিকা-পরীক্ষার প্রশ্ন-পত্র ইংরাজীতে হইবে, এজন্য প্রতিজ্ঞাগুলির সাধারণ নির্বচন (General enunciation) এবং অনুশীলনীর অন্তর্গত বিশেষ বিশেষ প্রশ্নগুলির (riders) ইংরাজী অনুবাদ যথাস্থানে প্রদত্ত হইল।

যাঁহার সুমহান্ আদর্শে অনুপ্রাণিত হইয়া আজ কলিকাতা বিশ্ববিদ্যালয় প্রগতির পথে ছুটিয়াছে সেই বাঙ্গালার অদ্বিতীয় শিক্ষানীতিবিশারদ স্বর্গীয় মহাত্মা সার আশুতোষ মুখোপাধ্যায়ের পুণ্যস্মৃতির উদ্দেশে এই বইখানি উত্‌সর্গ করিয়া ধন্য হইলাম। এই বিশ্ববিদ্যালয় সৃষ্টির পর তিনিই সর্বপ্রথম জ্যামিতির গবেষক ; তাঁহার

য়ুক্লিডের ২৫. প্রতিজ্ঞার বিকল্প প্রমাণ "Messenger of Mathematics" পত্রিকায় প্রকাশিত হয় প্রায় ষাট বত্‌সর পূর্বে; তিনি তখন বালকমাত্র।

যাঁহাদের জন্য এই বই লেখা তাঁহারা বিন্দুমাত্র সন্তোষ লাভ করিলে আমাদের শ্রম সফল হইল জানিব। এই পুস্তকের উন্নতিকল্পে সর্বপ্রকার সমালোচনা, পরামর্শ অথবা প্রস্তাব, সাদরে গৃহীত হইবে। অলমতিবিস্তরেণ।

দোলপূর্ণিমা
২৬শে মার্চ, ১৯৩৭
কলিকাতা

শ্রীক্ষেত্রমোহন বসু
শ্রীবীরেন্দ্রনাথ রায়

দ্বিতীয় সংস্করণের ভূমিকা

'সরল প্রবেশিকা-জ্যামিতি' গত বৎসর কলিকাতা বিশ্ববিদ্যালয় ও বঙ্গীয় গভর্ণমেণ্টের ডিরেক্টর বাহাদুর কর্তৃক প্রবেশিকা পরীক্ষার জন্য এবং ৭ম হইতে ১০ম শ্রেণীর পাঠ্যরূপে অনুমোদিত হয়। এই বৎসরের প্রারম্ভেই পুস্তকখানির প্রথম সংস্করণ নিঃশেষিত হওয়ায় আমরা ইহার দ্বিতীয় সংস্করণ বাহির করিতে সাহসী হইয়াছি; বঙ্গীয় ও আসামীয় বিদ্যালয়গুলির শিক্ষকবৃন্দের নিকট গ্রন্থখানি এতাদৃশ অল্প সময়ের মধ্যে সমাদৃত হওয়ায় আমরা তাঁহাদের নিকট কৃতজ্ঞতাপাশে বদ্ধ রহিলাম।

উপস্থিত সংস্করণটিতে গ্রন্থের বিষয়বিন্যাসের বিশেষ কোনরূপ পরিবর্তন করা হয় নাই, তবে স্থানে স্থানে ভাষাগত পরিবর্ত্তন ও অনুশীলনীর অন্তর্গত কয়েকটি অতিরিক্ত প্রশ্ন সন্নিবেশিত হইয়াছে। পুস্তকখানির সৌষ্ঠববৃদ্ধিকল্পে মডার্ণ বুক এজেন্সীর অধ্যক্ষ মহাশয় সবিশেষ চেষ্টা করিয়াছেন; যাবতীয় অনুশীলনী অপেক্ষাকৃত ক্ষুদ্র বর্জাইস্ অক্ষরে মুদ্রিত হওয়ায় ও বইখানির গড়ন কিছু-দৈর্ঘ্য প্রস্থে বিস্তৃত হওয়ায় সুশোভন হইবে বিবেচনায় তিনি যেরূপ শ্রম স্বীকার করিয়াছেন, তজ্জন্য তাঁহার কাছে আমরা ঋণী রহিলাম। আশা করি বইখানি বঙ্গীয় ও আসামীয় শিক্ষাপ্রতিষ্ঠানগুলির কর্তৃপক্ষগণের সমাদর লাভে বঞ্চিত হইবে না। ইতি

চূড়ামণি যোগ।
৭ই নভেম্বর, ১৯৩৮, কলিকাতা,

গ্রন্থকারদ্বয়

জ্যামিতিক পরিভাষা

A

acute angle সূক্ষ্মকোণ
acute-angled সূক্ষ্মকোণী
adjacent সন্নিহিত
alternate একান্তর
alternative proof বিকল্প প্রমাণ
altitude, উচ্চতা, উন্নতি
ambiguous case দ্ব্যর্থক ক্ষেত্র
analysis বিশ্লেষণ
angle কোণ
angle in a segment বৃত্তাংশস্থ কোণ
angle of a sector বৃত্তকলার কোণ
approximate value আসন্ন মান
antecedent পূর্বরাশি
arc চাপ
area ক্ষেত্রফল
arm বাহু, ভুজ
axiom স্বতঃসিদ্ধ
axis অক্ষ
axis of projection অভিক্ষেপাক্ষ
axis of symmetry প্রতিসাম্য অক্ষ

B

base ভূমি
bisection সমদ্বিখণ্ডন
bisector সমদ্বিখণ্ডক
boundary সীমা

C

centre কেন্দ্র
centre of gravity ভরকেন্দ্র
centre of inversion বিলোম কেন্দ্র
centre of similitude সাম্যকেন্দ্র
centroid ভরকেন্দ্র
chord জ্যা
chord of contact স্পর্শ-জ্যা
circle বৃত্ত
circum-centre পরিকেন্দ্র
circumference পরিধি
circumscribed পরিলিখিত
circumscribed circle, circum-circle পরিবৃত্ত
circum-radius পরিব্যাসার্ধ
co-axial সমাক্ষ
coincidence সমাপতন
collinear (points) একরেখীয়
common tangent সাধারণ স্পর্শক
complementary (angle) পূরক কোণ
concave প্রবৃদ্ধকোণী
concentric এককেন্দ্রীয়
conclusion সিদ্ধান্ত
concurrent সমবিন্দু
concyclic সমবৃত্ত
congruent সর্বসম
conjugate অনুবন্ধী, প্রতিযোগী
constant ধ্রুবক
construction অঙ্কন
contact স্পর্শ
converse বিপরীত
converse proposition বিপরীতপ্রতিজ্ঞা

convex প্রবৃদ্ধকোণহীন
corollary অনুসিদ্ধান্ত
correspending (angle) অনুরূপ
curved line, curve বক্ররেখা
curved surface বক্রতল
cyclic বৃত্তস্থ

D

data উপাত্ত
decagon দশভুজ
deduction সিদ্ধান্ত
degree অংশ, ডিগ্রি
diagonal কর্ণ
diameter ব্যাস
difference অন্তর
dimension মাত্রা
direct proof অন্বয়ী প্রমাণ
dircet common tangent সরল সাধারণ স্পর্শক
direction দিক্
distance দূরত্ব
divided externally বহির্বিভক্ত
divided internally অন্তর্বিভক্ত
duodecagon দ্বাদশভুজ

E

enunciation নির্বচন
equiangular সদৃশকোণী
equidistant সমদূরবর্তী
equilateral সমবাহু
escribed বহির্লিখিত
escribed circle, ex-circle বহির্বৃত্ত
ex-centre বহিঃকেন্দ্র
exercise অনুশীলনী
ex-radins বহির্ব্যাসার্ধ
exterior angle বহিঃকোণ
external বহিঃস্থ
external bisector বহির্দ্বিখণ্ডক
external contact বহিঃস্পর্শ

F

figure চিত্র
flat ruler চ্যাপ্টা মাপনী
foot (of the perpendicular) পাদবিন্দু
formula সূত্র

G

general enunciation সাধারণ নির্বচন
graph লেখ
graphical লৈখিক

H

height উচ্চতা, উন্নতি
heptagon সপ্তভুজ
hexagon ষড়ভুজ
hypotenuse অতিভুজ
hypothesis কল্পনা
hypothetical construction কাল্পনিক অঙ্কন

I

identical একরূপ
identically equal সর্বতোভাবে সমান, সর্বসম
image প্রতিবিম্ব
in-centre অন্তঃকেন্দ্র
included angle অন্তর্ভূত কোণ
in-direct proof ব্যতিরেকী প্রমাণ
in-radius অন্তর্ব্যাসার্ধ
inscribed অন্তর্লিখিত
inscribed circle, in-circle অন্তর্বৃত্ত
interior angle অন্তঃকোণ

interior opposite angle বিপরীত অন্তঃকোণ
internal অন্তঃস্থ
internal bisector অন্তর্দ্বিখণ্ডক
internal contact অন্তঃস্পর্শ
intersection ছেদ, প্রতিচ্ছেদ
inverse বিপরীত, ব্যস্ত
inversely similar ব্যস্ত অনুরূপ
inverse point বিলোম বিন্দু
inversion বিলোম ক্রিয়া
irregular বিষম
isosceles সমদ্বিবাহু

L

limit সীমা
limiting point পরিণাম বিন্দু
limiting position পরিণাম অবস্থান
line রেখা
locus সঞ্চারপথ

M

magnitude মান, পরিমাণ
major arc অধিচাপ
maximum বৃহত্তম
measure সাংখ্যমান
measurement মাপন, মাপ
medial section মাধ্যমিক ছেদ
median মধ্যমা
middle point মধ্যবিন্দু
minimum ক্ষুদ্রতম
minor arc উপচাপ
minute মিনিট, কলা

N

negative ঋণাত্মক
nine-point centre নববিন্দু কেন্দ্র
nine point circle নববিন্দু বৃত্ত
nonagon নবভুজ
normal অভিলম্ব
note দ্রষ্টব্য

O

oblique তির্যক
oblique projection তির্যক্ অভিক্ষেপ
obtuse angle স্থূলকোণ
obtuse-angled স্থূলকোণী
octagon অষ্টভুজ
opposite বিপরীত
ortho-centre লম্ববিন্দু
orthogonal সমকোণীয়
orthogonal projection লম্ব অভিক্ষেপ

P

parallel সমান্তরাল
parallelogram সামান্তরিক
particular enunciation বিশেষ নির্বচন
pedal line পাদরেখা
pedal triangle পাদত্রিভুজ
pentagon পঞ্চভুজ
perimeter পরিসীমা
perpendicular লম্ব
perpendicular bisector লম্ব দ্বিখণ্ডক
plane সমতল
plane geometry সামতলিক জ্যামিতি
point বিন্দু
point of concurrence সম্পাতবিন্দু
point of contact স্পর্শবিন্দু
point of intersection ছেদবিন্দু
point of medial section মাধ্যমিক ছেদবিন্দু
polar মেরুরেখা

pole মেরু
polygon বহুভুজ
position অবস্থান, অবস্থিতি
positive ধনাত্মক
postulate স্বীকার্য
practical ব্যাবহারিক, ফলিত
problem সম্পাদ্য, প্রশ্ন
projected অভিক্ষিপ্ত
projection অভিক্ষেপ
proof প্রমাণ
proof by exhaustion নিঃশেষ প্রক্রিয়া
property ধর্ম
roportional সামানুপাতিক
proposition প্রতিজ্ঞা
protractor চাঁদা, কোণচক্র
proved প্রমাণিত

Q

quadrilateral চতুর্ভুজ
quaesita করণীয়
quindecagon পঞ্চদশভুজ

R

radical axis মূলাক্ষ
radical centre মূলকেন্দ্র
radius ব্যাসার্ধ, অর
radius of inversion বিলোম ব্যাসার্ধ
reciprocal (figure) অন্যোন্য
rectangle আয়তক্ষেত্র, আয়ত
rectilineal figure ঋজুরেখ ক্ষেত্র
reflex angle প্রবৃদ্ধ কোণ
regular সুষম
rhombus রম্বস্
right angled সমকোণ
right angled সমকোণী
rough approximation স্থূলমান

S

scale, ruler মাপনী
scalene triangle বিষমবাহু ত্রিভুজ
secant ছেদক
second সেকেণ্ড, বিকলা
sector of a circle বৃত্তকলা
segment (of a circle) বৃত্তাংশ
segmen of a line খণ্ড, অংশ
self-conjugate স্বানুবদ্ধ
self-evident স্বতঃ প্রমাণ
semi-circle অর্ধবৃত্ত
set-square মাটাম, ত্রিকোণী
side বাহু, ভুজ
similar (triangle) সদৃশ
similar segment সদৃশ বৃত্তাংশ
similarity সাদৃশ্য
similitude সাম্য
size আয়তন
solid ঘন, ঘনবস্তু
solution সমাধান
space স্থান, দেশ
square বর্গক্ষেত্র
straight সরল
straight angle সরল কোণ
subtended angle সম্মুখ কোণ
superposition উপরিপাতন
supplementary সম্পূরক
surface পৃষ্ঠ, তল
symmetry প্রতিসাম্য
symmetrical প্রতিসম
symmetrically opposite প্রতিসমরূপে বিপরীত
synthesis সংশ্লেষণ

T

tangent স্পর্শক
theorem উপপাদ্য
theoretical তত্ত্বীয়, বাদীয়
thickness বেধ
transversal ভেদক
trapezium ট্রাপিজিয়ম
triangle ত্রিভুজ, ত্রিকোণ
triangulation ত্রিভুজে বিভক্তকরণ
trisection সমত্রিখণ্ডন
transverse common tangent তির্যক্ তির্যক সাধারণ স্পর্শক

U

undecagon একাদশভুজ
unit একক

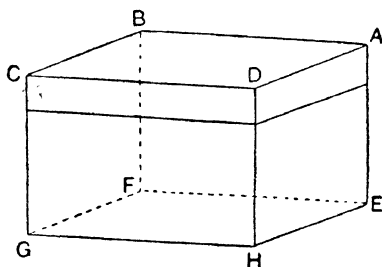
V

variable চল
vertex শীর্ষবিন্দু, শীর্ষ
vertical angle শিরঃকোণ
vertically opposite angle বিপ্রতীপ কোণ
volume ঘনফল

প্রথম অধ্যায়

বিবিধ সংজ্ঞা ও মূলতত্ত্বের পরিচয়

১। জ্যামিতি

আমরা জগতে যে সমুদয় পদার্থ দেখিতে পাই তাহাদের আকার ভিন্ন ভিন্ন, এবং প্রত্যেকটি কিছু না কিছু স্থান বা দেশ (space) অধিকার করিয়া আছে। উপরে অগণিত গ্রহ নক্ষত্র, নীচে পৃথিবী ও তাহার বক্ষে বিপুল অরণ্য, প্রশস্ত জনপদ, অভ্রভেদী শৈলমালা, দিগন্তবিস্তৃত মহাসাগর হইতে আরম্ভ করিয়া ক্ষুদ্র বাসগৃহ, অতিক্ষুদ্র লোষ্ট্র, পুস্তক, বাক্স, কৌটা প্রভৃতি নানা বস্তু অনন্ত শূন্যের অল্প-বিস্তর স্থান পূর্ণ করিয়া রহিয়াছে। বস্তুর অস্তিত্ব বোধ করিতে পারি বলিয়া আমরা দেশ সম্বন্ধে ধারণা করিতে পারি, কল্পনার সাহায্যে নানা প্রকার ছবি মানসপটে অঙ্কন

চিত্র ১

করিতে সমর্থ হই, এবং সহজ ছবি হইতে জটিল ছবির ধারণা করিয়া লই। উপরে যে বাক্সের চিত্রটি দেওয়া হইয়াছে তাহাতে বাক্সটি কোন গৃহের খানিকটা স্থান পূর্ণ করিয়া আছে স্পষ্ট বোধ হয়। এজন্য স্থানটি বাক্সের আয়তন দ্বারা সীমাবদ্ধ ; স্থানটির

দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা, বাক্সের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতার সমতুল্য ; এবং স্থানটির আয়তন বাক্সটির আয়তনের সমতুল্য। সেইরূপ, ইট, টেবিল, গোলক, অক্টারলোনী মনুমেণ্ট প্রভৃতি যাবতীয় বস্তুর অধিকৃত স্থানের আয়তন উক্ত বস্তুগুলির আয়তনের সমতুল্য এবং পরস্পর বিভিন্ন আকৃতির। বস্তুর জড়ত্বটুকু পরিত্যাগ করিয়া বস্তুর অধিকৃত স্থানের ভাবনা আমরা করিতে পারি।

জ্যামিতি নামক গণিতশাস্ত্রে বিভিন্ন স্থান আশ্রয় করিয়া অবস্থিত নানা আকৃতি ও আয়তনের যে সমস্ত চিত্র কল্পনা করিতে পারা যায়, সেই সমস্ত চিত্রের বিভিন্ন অংশের পরিমাপ, অঙ্কন ও সম্বন্ধ নির্ণয় এবং অপরাপর বিচার আলোচিত হয়।

২। **আয়তন** বা **মাত্রা** (Dimension)

বস্তু যে স্থান ব্যাপিয়া আছে তাহার পরিমাপ করা যাইতে পারে। **যেমন,** বাক্সটির দৈর্ঘ্য একটি মাপ, প্রস্থ একটি মাপ, ও উচ্চতা আবার একটি মাপ। এক একটি মাপকে **মাত্রা** বা **আয়তন** (Dimension) বলে। বাক্সটি যে স্থান ব্যাপিয়া আছে তাহার মাত্রা সর্বসমেত তিনটি,—দৈর্ঘ্য (Length), প্রস্থ বা বিস্তার (Breadth), ও বেধ বা উচ্চতা (Thickness, Height)। চিত্র ১-এ বাক্সটির অথবা তদধিকৃত স্থানের দৈর্ঘ্য AB, প্রস্থ AD, ও উচ্চতা AE।

বাক্সটির দৈর্ঘ্য মিস্ত্রীদের "গজ" লইয়া মাপিলে সব জায়গায় সমান হইবে, এবং প্রস্থ ও বেধ এই উভয় মাপও সর্বত্র সমান হইবে। কিন্তু নানা আকৃতিবিশিষ্ট বস্তুর ভিন্ন ভিন্ন অংশগুলির ভিন্ন ভিন্ন মাত্রা হওয়াই স্বাভাবিক —কোথাও ছোট, কোথাও বড়। অংশগুলির বিভিন্ন মাত্রা সমবায়ে গঠিত সম্পূর্ণ বস্তুটি দেশের একটি বিশিষ্ট আয়তনই অধিকার করে।

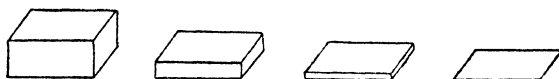
৩। **ঘন** (Solid)

তিন মাত্রা বা আয়তন বিশিষ্ট **বস্তু** মাত্রকেই **ঘন পদার্থ** (Solid) বলে ; এবং তদধিকৃত **স্থান**টিকে **ঘন** সংজ্ঞায় অভিহিত করা হয়।

অতএব, ঘন পদার্থের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও বেধ আছে ; প্রথম পৃষ্ঠায় অঙ্কিত চিত্রটি (figure) একটি ঘন, অর্থাৎ ইহা স্থানের তিনটি মাত্রা জুড়িয়া রহিয়াছে।

৪। **তল** বা **পৃষ্ঠ** (Surface)

আলোচিত বাক্সটির মোট ছয়টি পৃষ্ঠ আছে, এবং তদ্দ্বারাই ঘন স্থানটি সীমাবদ্ধ। বাক্সটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের মাপ ঠিক রাখিয়া কল্পনায় উহার উচ্চতা ক্রমশঃ হ্রাস করিলে

স্থানটিও সঙ্গে সঙ্গে হ্রাস পাইবে। একবারে সমস্তটা বিলুপ্ত হইলে উপরের ও নীচের পৃষ্ঠ ব্যতীত অপর চারিটি পৃষ্ঠ লুপ্ত হইয়া যাইবে। নিম্নের চিত্রগুলিতে ইহা দেখান হইয়াছে।

চিত্র ২

বুঝা গেল যে, দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ ব্যতীত বাক্সটির আর চিহ্ন মাত্র রহিল না ; এবং বাক্সটি একটি মাত্র পৃষ্ঠে পরিণত হইয়া গেল, এবং উহার উপর ও নীচ লইয়া মাত্র দুইটি পার্শ্ব (Side) রহিল। উচ্চতা লেশ মাত্র না থাকায় বাস্তব জগতে বাক্সটির পৃষ্ঠটিকে দৃষ্ট হইবে না বটে, কিন্তু কল্পনায় এরূপ ছবি ধরা যায়। দৈর্ঘ্য ও উচ্চতা ঠিক রাখিয়া প্রস্থটি ক্রমশঃ অন্তর্হিত হইলে অপর একটি পৃষ্ঠ পাওয়া যাইবে। অতএব, বাক্সটির দুইটি মাত্রা লইয়া (দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ ; দৈর্ঘ্য ও বেধ ; অথবা, প্রস্থ ও বেধ) আমরা বাক্সটির একটি পৃষ্ঠের কল্পনা করিতে পারি। এজন্য পৃষ্ঠের মাত্রা মোট দুইটি—দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ। পৃষ্ঠকে **তল** বা **তলক্ষেত্র** বলা হয়। চিত্র ১-এ ABCD একটি তল। বাক্সটিতে মোট ছয়টি তল আছে।

৫। **রেখা** (Line)

পূর্বোক্ত বাক্সটির একটি পৃষ্ঠ লওয়া গেল। দৈর্ঘ্য স্থির রাখিয়া প্রস্থকে ক্রমাগত কমাইতে থাকিলে আমরা একটি সীমায় উপস্থিত হইব, যাহার প্রস্থ মোটেই নাই।

চিত্র ৩

উপরের চিত্র দিয়া ইহা বুঝান গেল। এতদ্বারা আমরা তল হইতে একটি রেখায় উপনীত হইলাম। বাক্সটির দুইটি তল যেখানে মিলিত হইয়াছে, যথা, তল ABCD ও তল ADHE, বা তল ABCD ও তল BCGF, ইত্যাদি,

সেখানে এক একটি রেখার উৎপত্তি হইয়াছে। যথা, AD রেখা, BC রেখা, ইত্যাদি। এই রেখাগুলির দ্বারা তলগুলির সীমা নির্দিষ্ট হয়। উক্ত সীমাগুলি সবই প্রস্থহীন; কারণ, প্রস্থ থাকিলে তলেরই অংশ হইত। এজন্য রেখার কোন প্রস্থ বা বেধ থাকিতে পারে না। অতএব,

দুইটি তলের মিলন স্থানে একটি রেখার উৎপত্তি হয়, এবং সেই রেখা তলের একটি সীমা নির্দেশ করে।

পূর্বোক্ত বাক্সটির প্রান্তভাগে সর্বসমেত বারটি রেখা আছে।

রেখার একটি মাত্রা আছে, সেইটি দৈর্ঘ্য; উহার প্রস্থ ও বেধ নাই।

৬। **বিন্দু** (point)

স্পষ্ট বুঝা যাইবে যে রেখাকে ক্রমাগত হ্রাস করিলে আমরা এমন একটি সীমায় উপস্থিত হই যাহার দৈর্ঘ্যটির পর্যন্ত অস্তিত্ব থাকে না। নিম্নে চিত্র দেওয়া গেল।

চিত্র ৪

আলোচ্য বাক্সের সীমানির্দেশক তিনটি তিনটি সন্নিহিত রেখা, যেমন AB রেখা, AD রেখা ও AE রেখা, মিলিত হইয়া এক একটি "কোণা"র (Corner) সৃষ্টি করিয়াছে। বাক্সটিতে এইরূপ আটটি কোণা আছে, যথা A কোণা, B কোণা, প্রভৃতি। ইহাদের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ বা বেধ কিছুই নাই, কিন্তু কোন্ "স্থানে" আছে তাহা বুঝা যায়। এক একটি কোণাকে **বিন্দু** (point) বলে।

অতএব বুঝা গেল যে,

দুইটি রেখা যে স্থানে মিলিত হয় সেইটি একটি বিন্দু; বিন্দু দ্বারা রেখার সীমা নির্দিষ্ট হয়; বিন্দু মাত্রাহীন, কিন্তু ইহার অবস্থিতি আছে।

বর্ণমালার একটি মাত্র অক্ষর দ্বারা বিন্দু নির্দেশ করিতে হয়। যেমন A বিন্দু B বিন্দু, ইত্যাদি। পূর্বোক্ত বাক্সের মোট আটটি কোণা আছে, প্রত্যেকটিই বিন্দু

ঘনের পরিকল্পনা হইতে আমরা তল, রেখা ও বিন্দুর পরিকল্পনা করিতে পারি। পক্ষান্তরে, বিন্দু হইতে রেখা, তল ও ঘনেরও পরিকল্পনা করা যায়।

সারাংশ। ঘন তলদ্বারা সীমাবদ্ধ, তল রেখাদ্বারা সীমাবদ্ধ, এবং রেখা বিন্দুদ্বারা সীমাবদ্ধ ; বিপরীতক্রমে, কতিপয় বিন্দুর ঘনসন্নিবেশে রেখার উৎপত্তি, কতিপয় রেখার ঘনসন্নিবেশে তলের উৎপত্তি, কতিপয় তলের ঘনসন্নিবেশে ঘনের উৎপত্তি। ঘনের তিনটি মাত্রা, দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও বেধ ; তলের দুইটি মাত্রা, দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ ; রেখার একটি মাত্রা, দৈর্ঘ্য ; এবং বিন্দুর মাত্রা নাই, কিন্তু অবস্থিতি আছে।

৭। **সমতল** (Plane Surface), **অসমতল** বা **বক্রতল** (Curved Surface)

পূর্বোক্ত বাক্সটির ABCD তলের উপর একটি পেন্‌সিল রাখিলে দেখা যাইবে যে, পেন্‌সিলটির নিম্নভাগের সীমান্ত রেখাটি তলের সহিত মিলিয়া আছে। ঐ পেন্‌সিলটি যদি একটি ফুটবলের উপর রাখা যায়, তবে স্পষ্ট দেখা যাইবে যে, উহার একটি বিন্দু ভিন্ন বাকি অংশটুকু ফুটবলের সহিত মিলিয়া নাই। বাক্সের ঐ তলটি সমতল, কিন্তু বলটির উপরিভাগ সমতল নয়। কোন তলের উপর হাত বুলাইলে যদি উচু নীচু না বোধ হয়, তবে উহাকে মোটামুটি সমতল বলা যাইতে পারে ; উচু নীচু বোধ হইলেই উহাকে বক্রতল বলিতে হইবে। পুস্তকের পাতা, টেবিলের উপরিভাগ, গৃহের মেঝে, ইত্যাদি সমতলের উদাহরণ। ঢেউ খেলান টিনের ছাদ, কড়ার অন্তর ও বাহির, ডিমের উপরিভাগ ইত্যাদি বক্রতলের উদাহরণ।

দ্রষ্টব্য। কোন একটি সূত্রের একাংশে লোষ্ট্র বাঁধিয়া অপরাংশ আঙ্গুলে জড়াইয়া ঘুরাইলে সূত্রটি যে তল উৎপন্ন করিবে, তাহা সমতল। বালিকারা উল্লম্ফন ক্রীড়ার জন্য যে হাতলযুক্ত রজ্জু (skipping rope) ব্যবহার করে, সেই রজ্জু জোরে ঘুরাইলে উহা যে তল উৎপন্ন করে তাহা গোলকের ন্যায় বক্র, সমতল নহে।

সরল ও বক্র রেখা

৮। **সরল বা ঋজুরেখা** (Straight or Right Line)

তুইটি সমতল যেখানে পরস্পর ছেদ করে বা মিলিত হয় সেখানে সরলরেখার উৎপত্তি হয়। যেমন, বাক্সের ABCD সমতল ও ADHE সমতলের মিলনে সরলরেখা ADর উৎপত্তি হইয়াছে। পুনশ্চ, যদি কল্পনা করা যায় যে,

একটি বিন্দু একই দিকে চলিতেছে, তবে সেই বিন্দু যে রেখা অঙ্কিত করিয়া চলিবে তাহা সরলরেখা।

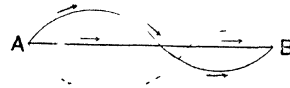
বর্ণমালার তুইটি অক্ষর দ্বারা সরল রেখা নির্দিষ্ট করিবার নিয়ম, যেমন AB সরলরেখা। তুইটি বিন্দু A ও B যোগ করিতে হইলে সরলরেখাব দ্বাবাই তাহা করা হয় বুঝিতে হইবে। A বিন্দু ও B বিন্দু উভয়ের ব্যবধান কতখানি তাহা ঐ সংযোজক AB সরলরেখার দৈর্ঘ্য দ্বারা নিরূপিত হয়।

A ———————— B

চিত্র ৫

৯। **বক্ররেখা** (Curved Line)

একটি সমতল ও একটি বক্রতল অথবা তুইটি বক্রতল পরস্পর ছেদ করিলে সাধারণত একটি বক্ররেখার উৎপত্তি হয়। পুষ্করিণীতে কলসী বা কোন বল ভাসিলে দেখা যায় যে, বস্তুগুলির উপরিভাগের বক্রতল ও জলের সমতল মিলিত হইয়া বস্তুগুলির পৃষ্ঠে বক্ররেখার উৎপত্তি করে। পুনশ্চ যদি কল্পনা কবা যায় যে,

একটি বিন্দু চলিতে চলিতে দিক্ পরিবর্তন করিতেছে, তবে সেই বিন্দু যে রেখা অঙ্কিত করিয়া চলিবে তাহা বক্ররেখা।

চিত্র ৬

A বিন্দু ও B বিন্দু উভয়কে অসংখ্য বক্র রেখা দ্বারা এবং মাত্র একটি সরল-রেখা দ্বারা সংযুক্ত করা যাইতে পারে। (চিত্র ৬ দেখ)।

মন্তব্য। বিশেষ বিশেষ বক্রতল কোন বিশেষরূপে সংস্থিত সমতল দ্বারা কর্তিত হইলে

১০। সরলরেখার কয়েকটি ধর্ম

(ক) দুই নির্দিষ্ট বিন্দুর সংযোজক সরলরেখা একাধিক হইতে পারে না।

(খ) দুই বিভিন্ন সরলরেখা একাধিক বিন্দুতে পরস্পর মিলিত বা ছিন্ন হইতে পারে না।

(গ) একটি বিন্দুর মধ্য দিয়া অগণিত সরল রেখা টানা যাইতে পারে।

(ঘ) দুইটি বিন্দুর **ন্যূনতম দূরত্ব** (shortest distance) তাহাদের সংযোজক সরলরেখা দ্বারা সূচিত হয়।

(ঙ) দুইটি সরলরেখা দ্বারা কোন ক্ষেত্রই পরিবেষ্টিত হয় না। সরলরেখা দ্বারা কোন ক্ষেত্রকে সীমাবদ্ধ করিতে হইলে অন্তত তিনটি সরলরেখার প্রয়োজন হইবে।

(চ) একটি সরলরেখাকে অপর একটি সরলরেখার উপর পাতিত করিলে উহারা পরস্পর মিলিত হইয়া যায়।

(ছ) একটি সরলরেখার সীমাবিন্দুদ্বয় অপরটির সীমাবিন্দুদ্বয়ের উপর পতিত হইলে রেখা দুইটি **সমান** হইবে।

১১। সামতলিক জ্যামিতি

দুইটি সমতল পরস্পর মিলিত হইলে সরলরেখার উৎপত্তি হয়। আবার, একটি সরলরেখাকে চালনা করিয়াও সমতল উৎপন্ন করা যাইতে পারে; অতএব, সমতলের সংজ্ঞা এইরূপ—

যে তলস্থিত যে কোন দুইটি বিন্দু সরলরেখা দ্বারা যোগ করিলে সরলরেখার সর্বাংশ উহার সহিত মিশিয়া যায় তাহাকে সমতল বলে।

একই সমতলে অবস্থিত বিন্দু, সরলরেখা ও বক্ররেখার পরস্পর সম্বন্ধ নির্ণয়ই **সামতলিক জ্যামিতির** আলোচ্য বিষয়। সামতলিক ক্ষেত্রে বেধ সংক্রান্ত আলোচনা হইতে পারে না; এজন্য, সামতলিক জ্যামিতিকে (Plane Geometry) দ্বিমাত্রিক জ্যামিতিও (Two-Dimensional Geometry) বলা হয়। এই পুস্তকের বিষয় হইল সমতলক্ষেত্রস্থ জ্যামিতি। ইহাকে **রেখাগণিত** বা **ক্ষেত্রতত্ত্বও** বলে।

অনুশীলনী ১

১। তুমি যে-ক্লাসে বসিয়া আছ তাহা পরীক্ষা করিয়া নিম্ন প্রশ্নগুলির উত্তর দাও—

(১) 'ঘরের কয়টি তল আছে ?

(২) তলগুলির কোন্‌টি সমতল এবং কোন্‌টি বক্রতল ?

(৩) তলগুলি কোথায় কোথায় মিলিত হইয়াছে দেখাও এবং যেখানে মিলিত হইয়াছে সেখানে কি প্রকার রেখার উৎপত্তি হইয়াছে ?

(৪) এমন কোন স্থান আছে যেখানে তিনটি তল মিলিত হইয়াছে ?

২। নিম্ন পদার্থগুলির কোন্‌টির কয়টি তল বল ?

তোমার জ্যামিতি পুস্তক, বোর্ড, পেন্‌সিল, ফুট্‌বল, ও ডিম।

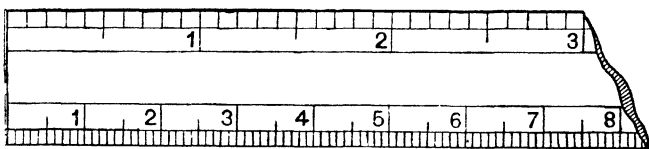
৩। তোমার পেন্‌সিলটি কাটিবার পর ইহার কয়টি তল হইল ?

৪। বক্রতল ও সমতলের ছেদনে সরলরেখার উৎপত্তি হইতে পারে এরূপ একটি উদাহরণ দেখাও।

৫। সরল ও বক্ররেখার পার্থক্য কি ? একটি স্থান সীমাবদ্ধ করিতে হইলে অন্যূন কতগুলি সরলরেখার প্রয়োজন হইবে ? অন্যূন কতগুলি বক্ররেখা একটি স্থান সীমাবদ্ধ করিতে পারে ?

৬। দুইটি সরলরেখার কোন সাধারণ অংশ থাকিতে পারে কি ?

১২। সরলরেখার দৈর্ঘ্য নির্ণয়

সরলরেখার দৈর্ঘ্য নির্ণয়ের জন্য মাপনী (Ruler) যন্ত্রের ব্যবহার হয়। নিম্নে ইহার একটি চিত্র প্রদত্ত হইল।

চিত্র ৭

মাপনী যন্ত্রের একপ্রান্ত হইতে অপর প্রান্ত পর্যন্ত একধারে 1, 2, 3, 4 ইত্যাদি চিহ্নদ্বারা যথাক্রমে এক ধারে ইঞ্চির দূরত্ব ও অপর ধারে সেন্টিমিটারে দূরত্ব দেওয়া আছে। প্রত্যেক ইঞ্চি বা সেন্টিমিটারকে আবার দশভাগে বিভক্ত করা আছে। এই মাপনী দ্বারা এক ইঞ্চির দশমাংশ বা এক সেন্টিমিটারের দশমাংশ পর্যন্ত মাপা যায়। সরলরেখা অঙ্কন করিবার জন্য অথবা দুইটি বিন্দু যোগ করিবার জন্যও এই যন্ত্র ব্যবহৃত হয়। দুইটি বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় করিতে হইলে বিন্দু দুইটি সরলরেখা দ্বারা যোগ করিয়া তাহার দৈর্ঘ্য মাপিয়া নির্ণয় করিতে হয় ; ইহার দৈর্ঘ্যটি বিন্দু দুইটির দূরত্ব নির্দেশ করে।

অনুশীলনী ২

নিম্ন প্রশ্নগুলির সমাধান স্কেল, বা মাপনীর সাহায্যে করিতে হইবে—

১। AB সরলরেখা মাপিয়া ইহার দৈর্ঘ্য কত ইঞ্চি এবং কত সেণ্টিমিটার তাহা নির্ণয় কর।

A B

চিত্র ৮

২। A ও B দুইটি বিন্দু—ইহাদের দূরত্ব কত ইঞ্চি ?

A . . B

৩। 4 ইঞ্চি এবং 6 ইঞ্চি দীর্ঘ দুইটি সরলরেখা অঙ্কন কর এবং ইহাদের মধ্যবিন্দু নির্ণয় কর।

সংজ্ঞা। যে বিন্দু কোন সরলরেখাকে সমান দুইটি অংশে বিভক্ত করে তাহাকে ঐ রেখার **মধ্যবিন্দু** (middle point) বলে ; কোন সীমাবদ্ধ রেখার একাধিক মধ্যবিন্দু থাকিতে পারে না।

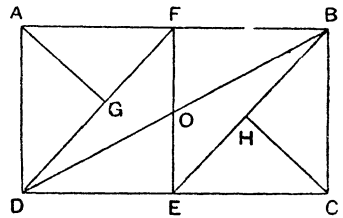
৪। একটি সরলরেখা অঙ্কন করিয়া উহার দ্বিগুন দীর্ঘ আর একটি সরলরেখা অঙ্কন কর।

৫। একটি সরলরেখা অঙ্কন করিয়া উহার অর্ধেক দীর্ঘ আর একটি সরলরেখা অঙ্কন কর।

৬। 3·6 ইঞ্চি ও 5·8 সেণ্টিমিটার দীর্ঘ দুইটি সরলরেখা অঙ্কন কর এবং ইহাদের অর্ধেক কত ইঞ্চি বা সেণ্টিমিটার হইবে মাপিয়া নির্ণয় কর।

৭। চিত্র হইতে মাপিয়া নির্ণয় কর—

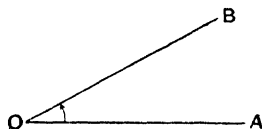
AB = কত ইঞ্চি ? CD = কত ইঞ্চি ?
BF = কত ইঞ্চি ? ED = কত ইঞ্চি ?
BE = কত ইঞ্চি ? DF = কত ইঞ্চি ?
AG = কত সেঃমিঃ ? CH = কত সেঃমিঃ ?
OF = কত সেঃমিঃ ? OE = কত সেঃমিঃ
BD = কত সেণ্টিমিটার ?

কোন্ কোন্ বিন্দুর দূরত্ব পরস্পর সমান ?

চিত্র ৯

কোণ (Angle)

১৩। কোণের উৎপত্তি

দুইটি সরলরেখা যদি কোন বিন্দুতে মিলিত হয়, তবে সেই বিন্দুতে কোণের উৎপত্তি হয়। বিন্দুটিকে ঐ কোণের **শীর্ষ** (Vertex) বলে এবং সরলরেখা দুইটিকে কোণের দুইটি **বাহু** (Arms) বলে। দুইটি সরলরেখার পবস্পর যে **নতি** (inclination) তাহা ঐ **কোণ**দ্বারাই সূচিত হয়।

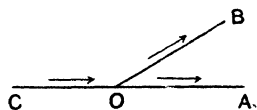
B
O A

চিত্র ১০

AO এবং BO দুইটি সরলরেখা O বিন্দুতে মিলিত হইয়া একটি কোণ উৎপন্ন করিয়াছে (চিত্র ১০)। O বিন্দুটি এই কোণের শীর্ষবিন্দু, এবং OA ও OB ইহার দুইটি বাহু। AO এবং BO রেখাদ্বয় এই কোণটি উৎপন্ন করিয়াছে. এজন্য ইহাকে AOB অথবা BOA কোণ বলা হয়। বর্ণমালার তিনটি অক্ষরেব মধ্যে মধ্যটিদ্বারাই শীর্ষবিন্দু সূচিত হয়। কখন কখন কোণটিকে মাত্র 'O' কোণ বলিয়াও নির্দেশ করা হয়।

১৩ (ক)। কোণের অর্থ

(১) মনে কর, চিত্র ১০এ OA সরলরেখা স্থির আছে। OB সরলরেখা OAর সহিত মিলিত ছিল, পরে OB সরলরেখার O প্রান্ত স্থির করিয়া উহাকে তীরনির্দিষ্ট দিকে ঘুরান গেল। এই ঘূর্ণনের পরিমাণ দ্বারাই OA ও OB স্বারা উৎপন্ন কোণ সূচিত হয়। OB যত ঘুরিবে AOB কোণের পরিমাণ ততই বর্ধিত হইবে। অতএব, **কোণের পরিমাণ বাহুর ঘূর্ণনের মাত্রার উপর নির্ভর করে, বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্যের উপর নির্ভর করে না।**

(২) মনে কর, তুমি C বিন্দু হইতে রওনা হইয়া A বিন্দুর দিকে চলিতে আরম্ভ করিলে এবং CA সরলরেখাস্থিত O বিন্দুতে আসিয়া B অভিমুখে চলিতে আরম্ভ করিলে। O বিন্দুতে তোমার দিক পরিবর্তন হইল ; এবং যতটা পরিবর্তন হইল, তাহা AOB কোণ দ্বারাই পরিমিত হইবে।

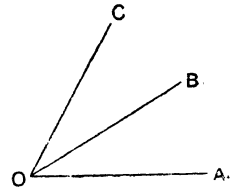
B
C O A

চিত্র ১১

১৪। **সমান কোণ** (Equal Angles)

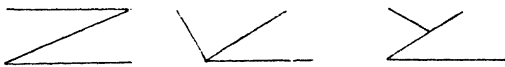
পূর্বে বলা হইয়াছে যে, কোণের পরিমাণ বাহুর দৈর্ঘ্যের উপর নির্ভর করে না, শুধু বাহুদ্বয়ের অবস্থানের উপর নির্ভর করে। সুতরাং

দুইটি কোণ যদি এমন হয় যে একটির উপর অপরটি স্থাপন করিলে উভয়ের শীর্ষবিন্দু এবং বাহুদ্বয় মিলিয়া যায়, তবে কোণ দুইটি পরস্পর সমান হইবে।

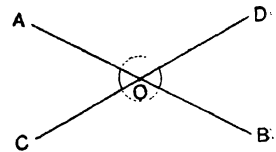
১৫। **সন্নিহিত কোণ** (Adjacent Angles)

AOB ও COB দুইটি কোণ। ইহাদের একটি-মাত্র শীর্ষবিন্দু O ; OB ইহাদের একটি সাধারণ বাহু এবং কোণ দুইটি এই সাধারণ বাহুর বিপরীত দিকে অবস্থিত। এই প্রকার কোণ দুইটির নাম **সন্নিহিত কোণ** (Adjacent Angles)।

চিত্র ১২

যদি দুইটি কোণের একই শীর্ষবিন্দু হয় ও একটি বাহু সাধারণ থাকে, এবং কোণ দুইটি ঐ সাধারণ বাহুর বিপরীতদিকে অবস্থিত হয় তবে তাহাদিগকে সন্নিহিত কোণ বলে।

প্রশ্ন। নিম্ন চিত্রগুলিতে সন্নিহিত কোণ থাকিলে তাহার নির্দেশ কর—

চিত্র ১৩

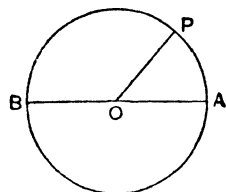
১৬। **বিপ্রতীপ কোণ** (Vertically Opposite Angles)

AB ও CD এই দুইটি সরলরেখা O বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিয়াছে। AOC ও BOD এই দুইটি **বিপ্রতীপ কোণ**; এবং, AOD ও BOC এই দুইটিও **বিপ্রতীপ কোণ**।

চিত্র ১৪

দুইটি সরলরেখা পরস্পর ছেদ করিলে যে চারিটি কোণ উৎপন্ন হয়, তাহাদের মধ্যে শীর্ষবিন্দুর বিপরীতদিকে অবস্থিত কোণ দুইটিকে

১৭। বৃত্ত (Circle)

(ক) বৃত্ত, কেন্দ্র ও পরিধি

কোন সামতলিক ক্ষেত্রে একটি নির্দিষ্ট স্থির বিন্দু O হইতে সর্বদা সমান দূরবর্তী হইয়া যদি অপর একটি বিন্দু P সম্পূর্ণ ঘুরিয়া আসে, তবে একটি বক্ররেখা উৎপন্ন হইয়া ক্ষেত্রটির কিয়দংশ সীমাবদ্ধ করিবে; ক্ষেত্রের এই সীমাবদ্ধ অংশটিকে **বৃত্ত** (Circle) বলে। স্থির বিন্দু O কে বৃত্তের **কেন্দ্র** (Centre) বলা হয়, এবং যে বক্ররেখা ক্ষেত্রটিকে সীমাবদ্ধ করে, তাহাকে ইহার **পরিধি** (circumference) বলে। APB বক্ররেখাটি হইল বৃত্তের পরিধি।

চিত্র ১৫

দ্রষ্টব্য ১। বৃত্ত বলিতে সাধারণত ইহার পরিধিকেই বুঝাইয়া থাকে।

২। কেন্দ্র O হইতে A, P, B প্রভৃতি যাবতীয় বিন্দুর দূরত্ব পরস্পর সমান।

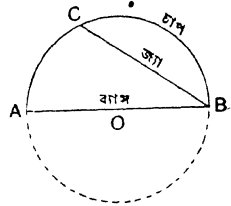
(খ) ব্যাস ও ব্যাসার্ধ

যে সরলরেখা বৃত্তের কেন্দ্র ভেদ করিয়া উহার পরিধি দ্বারা উভয়দিকে সীমাবদ্ধ হয়, তাহার নাম **ব্যাস** (Diameter); যথা, চিত্রের সসীম সরলরেখা AB বৃত্তের ব্যাস। বৃত্তের কেন্দ্র হইতে পরিধি পর্যন্ত বিস্তৃত সরলরেখাকে **ব্যাসার্ধ** বা **অর** (Radius) বলে; যথা, চিত্রের OP, OA, OB প্রত্যেকটিই ব্যাসার্ধ।

মন্তব্য ১। কোন নির্দিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধগুলি সবই সমান।

২। সকল বৃত্তের আকৃতি এক প্রকার হইলেও ব্যাসার্ধের মাপ ছোট বড় হইলে বৃত্তক্ষেত্রটিও বিশেষ অনুপাতে ছোট বড় দেখাইবে। (কম্পাস দ্বারা ইহা শিক্ষকগণ বুঝাইয়া দিবেন।)

(গ) অর্ধবৃত্ত, জ্যা ও চাপ

বৃত্ত কোন ব্যাসের দ্বারা খণ্ডিত হইলে যে দুইটি ভাগ উৎপন্ন হয় তাহাদের প্রত্যেক ভাগকে **অর্ধবৃত্ত** (Semicircle) বলে। চিত্রে ব্যাস AB, ও পরিধির অর্ধভাগ ACB, বৃত্তের ক্ষেত্রটিকে সীমাবদ্ধ করিয়া একটি অর্ধবৃত্ত গঠন করিয়াছে। ফুট্‌কিদ্বারা চিহ্নিত নীচের দিকে অপর একটি অর্ধবৃত্ত দৃষ্ট হইতেছে।

চিত্র ১৬

পরিধির যে কোন অংশকে বৃত্তের **চাপ** (Arc) বলা হয়; এবং কোন চাপের সীমান্ত বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাটি **জ্যা** (Chord) নামে অভিহিত। ১৬ চিত্রে অঙ্কিত সরলরেখা BCটি জ্যা এবং তদূর্ধ্বে চাপ কোন্‌টি তাহা নির্দিষ্ট হইয়াছে।

অনুশীলনী ৩

১। O একটি স্থির বিন্দু। ইহা হইতে 2·5 ইঞ্চি দূরে অবস্থিত কতকগুলি বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় কর।

২। 3·6 সেণ্টিমিটার ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। একটি ব্যাস আঁকিয়া ইহার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

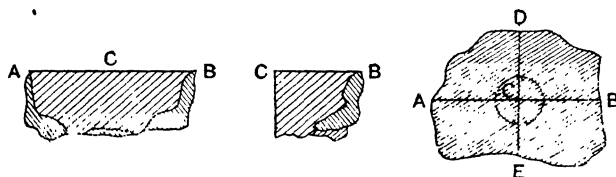
৩। A ও B দুইটি বিন্দু 3 ইঞ্চি দূরে অবস্থিত। B হইতে 3·5 ইঞ্চি দূরে স্থিত বিন্দুগুলির অবস্থান এবং B হইতে 2·5 ইঞ্চি দূরে অবস্থিত বিন্দুগুলির অবস্থান নির্ণয় কর। এমন কোনও বিন্দু আছে কি যাহা A হইতে 2·5 ইঞ্চি এবং B হইতে 3·5 ইঞ্চি দূরে অবস্থিত?

৪। O একটি স্থির বিন্দু। O কে কেন্দ্র করিয়া, 1·5, 2 ও 2·5 ইঞ্চি ব্যাসার্ধ লইয়া যথাক্রমে তিনটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। কেন্দ্র ভেদ করিয়া একটি সরলরেখা লও। বৃত্তগুলিদ্বারা ছিন্ন ব্যাসের বিভিন্ন অংশগুলির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সংজ্ঞা। যে সব বৃত্তের কেন্দ্র একই বিন্দু তাহাদের **এককেন্দ্রীয়** (Concentric) বৃত্ত বলা হয়।

১৮। সমকোণ (Right Angle)

সমকোণের পরিকল্পনা নিম্নলিখিত পরীক্ষার দ্বারা সহজেই করা যাইতে পারে। একখানি কাগজ ভাঁজ কর; মনে কর, ভাঁজের দাগ ACB সরলরেখা। C বিন্দুতে কাগজখানি পুনরায় ভাঁজ কর যেন AC, BCর উপর পড়ে। কাগজ-

খানি খুলিয়া ফেলিলে দেখা যাইবে যে C বিন্দুতে চারিটি কোণ উৎপন্ন হইয়াছে। তাহাদের নাম দাও ACD, DCB, BCE ও ECA কোণ। উপরে

চিত্র ১৭

অঙ্কিত মধ্যম চিত্র হইতে স্পষ্ট বুঝা যায় যে এই চারিটি কোণ সমান। ইহার প্রত্যেকটি কোণকে **সমকোণ** বলে। আরও দেখা যায় যে, ACD ও BCD কোণ দুইটি সন্নিহিত কোণ, ও ইহারা পরস্পর সমান এবং প্রত্যেকটি সমকোণ। সুতরাং, সমকোণের সংজ্ঞা এইরূপ—

কোন সরলরেখাস্থ একটি বিন্দু হইতে যদি অপর একটি সরল-রেখা অঙ্কন করা যায় এবং তৎসন্নিহিত কোণ দুইটি পরস্পর সমান হয়, তবে প্রত্যেক কোণটিকে সমকোণ বলে।

যে কোন সমকোণের দুইটি বাহুর কোন একটিকে অপরটির উপর **লম্ব** (Perpendicular) বলে। সর্বদক্ষিণ চিত্রে ACD একটি সমকোণ; AC, DCএর উপর লম্ব, এবং DE, ABএর উপর লম্ব। এরূপও বলা যায় যে, AB, DC সরল রেখাদ্বয় পরস্পর 'সমকোণে নত' (inclined at right angles)।

মন্তব্য। AB রেখার C বিন্দুতে একই ক্ষেত্রে দুইটি লম্ব দুইপার্শ্বে অঙ্কন করা যাইতে পারে, যথা, CD ও CE।

১৯। ডিগ্রি, মিনিট ও সেকেণ্ড

একখানি বড় পাতলা কাগজে কম্পাসদ্বারা একটি বড় বৃত্ত আঁকিয়া বৃত্তটি কাঁচি দিয়া সাবধানে কাটিয়া লও। বৃত্তটিকে পর পর ভাঁজ কর; ভাঁজগুলি পরস্পর সমান হওয়া প্রয়োজন। নখ দিয়া এমন ভাবে চাপ দাও যেন ভাঁজের দাগ স্পষ্ট হয়। তারপর কাগজখানি সম্পূর্ণ খুলিয়া ফেল। দেখিবে, বৃত্তটি কয়েকটি সমান

অংশে বিভক্ত হইয়াছে, বৃত্তাংশগুলির সংমুখস্থ কেন্দ্রের কোণগুলি সমান হইয়াছে, এবং তাহাদের সমষ্টি চারি সমকোণ হইয়াছে। যদি এইরূপ বৃত্তকে 360 সমান অংশে ভাঁজ করা সম্ভব হয়, তাহা হইলে কেন্দ্রে 360টি সমান সমান কোণ অঙ্কিত হইবে। এইরূপ এক একটি ক্ষুদ্র কোণের পরিমাণের নাম এক **ডিগ্রি** (Degree); কেন্দ্রস্থ কোণগুলির সমষ্টি 4 সমকোণ। অতএব,

4 **সমকোণ** $= 360^\circ$ ($^\circ$ ডিগ্রির চিহ্ন)

সুতরাং, 1 **সমকোণ** $= 90^\circ$।

সূক্ষ্ম হিসাবের জন্য এক ডিগ্রি পরিমাণ কোণকেও আবার সমান 60 ভাগে ভাগ করিয়া প্রত্যেক সূক্ষ্ম ভাগের নাম দেওয়া হয় এক **মিনিট** (Minute), এবং এক মিনিট পরিমাণ কোণকেও আবার সমান 60 ভাগে ভাগ করিয়া প্রত্যেক অতিসূক্ষ্ম ভাগের নাম দেওয়া হয় এক **সেকেণ্ড** (Second)। সুতরাং, কোণের পরিমাণের আর্যা এইরূপ হইবে—

$60''$ ($''$ সেকেণ্ডের চিহ্ন) $= 1'$ ($'$ মিনিটের চিহ্ন)

$60' = 1^\circ$

$90^\circ = 1$ সমকোণ।

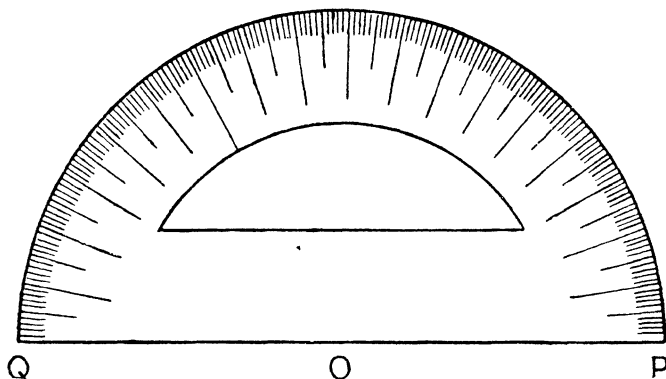
মনে রাখিবে, 1 সমকোণ $= 90^\circ$

2 সমকোণ $= 180^\circ$

4 সমকোণ $= 360^\circ$

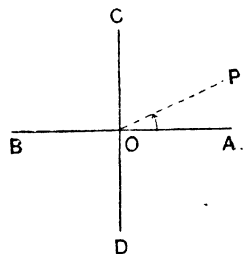
২০। চাঁদার ব্যবহার

কোন প্রদত্ত কোণের পরিমাণ মাপা ও কোন নির্দিষ্ট পরিমাণের কোণ আঁকিবার জন্য **চাঁদা** (Protractor) নামক যন্ত্রের ব্যবহার হয়। এই চাঁদা অর্ধবৃত্তাকার। ইহার পরিধিতে ডিগ্রির চিহ্ন স্বরূপ 180 সমান ভাগ খোদিত আছে, এবং চাঁদার ব্যাসের উপর কেন্দ্রবিন্দুর চিহ্ন আছে। কোন অঙ্কিত কোণ চাঁদা দ্বারা মাপিতে হইলে, চাঁদার কেন্দ্রবিন্দু Oকে অঙ্কিত কোণের শীর্ষবিন্দুর উপর রাখিয়া QP

ব্যাসটিকে কোণের যে কোন একটি বাহুর সহিত মিশাইয়া রাখিতে হইবে। অঙ্কিত কোণের অপর বাহু চাঁদার পরিধিস্থ যত ভাগ অঙ্কের সহিত মিলিয়া যাইবে কোণটির পরিমাণও তত ডিগ্রি হইবে।

চিত্র ১৮

(শিক্ষক মহাশয় ছাত্রদিগকে চাঁদার সম্যক্ ব্যবহার বুঝাইয়া দিবেন)

২১। কোণের শ্রেণী বিভাগ

মনে কর, AB ও CD এই দুইটি সরলরেখা O বিন্দুতে পরস্পর সমকোণে ছেদ করিয়াছে। মনে কর, আর একটি সরলরেখা OP, O বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া OAর অবস্থান হইতে আরম্ভ করিয়া তীর-সূচিত দিকে ঘুরিতে আরম্ভ করিল। OP যখন ঘুরিয়া OCর সহিত মিলিবে, তখন যে কোণ উৎপন্ন হইবে তাহার পরিমাণ এক সমকোণ বা 90° হইবে। যখন OP,

চিত্র ১৯

OBর সহিত মিলিবে তখন উৎপন্ন কোণ AOBর পরিমাণ, অর্থাৎ দুই সমকোণ বা 180° হইবে। পুনরায় ঘুরিয়া ODর সহিত মিশিলে তিন সমকোণ বা 270° এবং OAএর সহিত পুনরায় মিশিলে চারি সমকোণ বা 360° পরিমাণ কোণ উৎপন্ন হইবে। অতএব দেখা যাইতেছে যে, OP রেখা Oএর চতুর্দিকে সিকি পাক ঘুরিলে

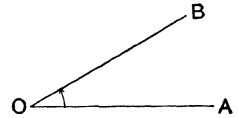
এক সমকোণ (90°), আধ পাক ঘুরিলে দুই সমকোণ (180°), পৌনে এক পাক ঘুরিলে তিন সমকোণ (270°), এবং পূর্ণ এক পাক ঘুরিলে চার সমকোণ (360°) পরিমাণ কোণ উৎপন্ন হয়।

মন্তব্য ১। ঘূর্ণনের মাত্রা বর্ধিত করিলে চারি সমকোণের অপেক্ষা বৃহত্তর কোণও সৃষ্ট হওয়া সম্ভব, কিন্তু জ্যামিতিতে এরূপ কোণ সম্বন্ধে আলোচনা হয় না।

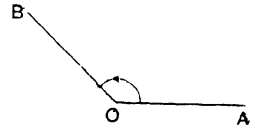
২। তীরসূচিত দিকের বিপরীত ঘূর্ণনে অন্য প্রকারে কোণ উৎপন্ন হইতে পারে। প্রথম দিকের উৎপন্ন কোণকে যদি 'ধনাত্মক' (Positive) বলি, দ্বিতীয়দিকের উৎপন্ন কোণকে 'ঋণাত্মক' (Negative) বলা যাইতে পারে।

অতএব, সমকোণের সহিত তুলনায় পরিমাণভেদে কোণকে চারি শ্রেণীতে বিভক্ত করা হয়; যথা—সূক্ষ্মকোণ, স্থূলকোণ, সরলকোণ ও প্রবৃদ্ধকোণ।

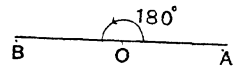
(ক) **সূক্ষ্মকোণ** (Acute Angle)

যে কোণের পরিমাণ এক সমকোণ অপেক্ষা কম তাহাকে **সূক্ষ্মকোণ** বলে। সূক্ষ্মকোণের পরিমাণ 0° হইতে 90° এর মধ্যে হইবে। যথা, কোণ AOB (চিত্র ২০)।

চিত্র ২০

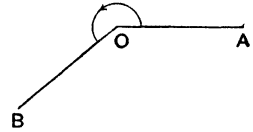
(খ) **স্থূলকোণ** (Obtuse Angle)

যে কোণের পরিমাণ এক সমকোণ অপেক্ষা অধিক এবং দুই সমকোণ অপেক্ষা কম তাহাকে **স্থূলকোণ** বলে। স্থূলকোণের পরিমাণ 90° হইতে 180° এর মধ্যে হইবে। তীরচিহ্নিত AOB কোণটি স্থূলকোণ (চিত্র ২১)।

চিত্র ২১

(গ) **সরলকোণ** (Straight Angle)

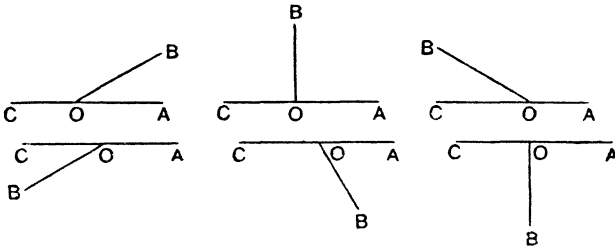
একটি সরলরেখা ইহার এক প্রান্তকে কেন্দ্র করিয়া আধ পাক ঘুরিলে যে কোণ উৎপন্ন হয় তাহাকে **সরলকোণ** বলে। সরলকোণের পরিমাণ দুই সমকোণ বা 180°, এবং ইহার বাহুদ্বয় শীর্ষবিন্দুর বিপরীত দিকে **একই সরলরেখায়** অবস্থিত। AOB কোণটি একটি সরলকোণ (চিত্র ২২)।

চিত্র ২২

(ঘ) প্রবৃদ্ধকোণ (Reflex or Re-entrant Angle)

যে কোণের পরিমাণ দুই সমকোণ অপেক্ষা অধিক কিন্তু চারি সমকোণ অপেক্ষা কম তাহাকে **প্রবৃদ্ধকোণ** বলে। প্রবৃদ্ধ-কোণ 180° হইতে 360° এর মধ্যে থাকিবে। তীরচিহ্নিত AOB কোণটি একটি প্রবৃদ্ধকোণ (চিত্র ২৩)।

চিত্র ২৩

২২। চিত্রাঙ্কন সাহায্যে জ্যামিতিক তথ্যের অনুসন্ধান

(এই অনুচ্ছেদটি ঔপপত্তিক জ্যামিতির পূর্বাভাস স্বরূপ এবং ছাত্রদের বিশেষ উপযোগী)

পরীক্ষা ১। কোন সরলরেখাস্থিত একটি বিন্দু হইতে অপর একটি সরল-রেখা অঙ্কন কর। এই রকম ছয়টি চিত্র অঙ্কন কর।

চিত্র ২৪

চাঁদা দ্বারা প্রত্যেক চিত্রের কোণগুলির পরিমাণ নির্ণয় কর এবং নিম্নলিখিত ভাবে লিখ—

অতএব,

(১) চিত্রে, $\angle AOB =$ ডিগ্রি, $\angle BOC =$ ডিগ্রি } $\angle AOB + \angle BOC =$ ডিগ্রি

(২) চিত্রে, $\angle AOB =$ ডিগ্রি, $\angle BOC =$ ডিগ্রি } $\angle AOB + \angle BOC =$ ডিগ্রি

(৩) চিত্রে, $\angle AOB =$ ডিগ্রি, $\angle BOC =$ ডিগ্রি } $\angle AOB + \angle BOC =$ ডিগ্রি

(৪) চিত্রে, $\angle AOB =$ ডিগ্রি, $\angle BOC =$ ডিগ্রি; $\angle AOB + \angle BOC =$ ডিগ্রি

(৫) চিত্রে, $\angle AOB =$ ডিগ্রি, $\angle BOC =$ ডিগ্রি; $\angle AOB + \angle BOC =$ ডিগ্রি

(৬) চিত্রে $\angle AOB =$ ডিগ্রি, $\angle BOC =$ ডিগ্রি; $\angle AOB + \angle BOC =$ ডিগ্রি

দেখা যাইবে যে, প্রত্যেক চিত্রে $\angle AOB + \angle BOC = 180^\circ$।

অতএব, ইহা হইতে অনুমান করা যাইতে পারে যে,

একটি সরলরেখার উপর অপর একটি সরলরেখা দণ্ডায়মান হইলে যে দুইটি সন্নিহিত কোণ উৎপন্ন হয়, তাহাদের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান হইবে।

পরীক্ষা ২। দুইটি সরলরেখাকে পরস্পর ছেদ করাইয়া অঙ্কন কর ; এবং ছেদবিন্দুতে যে চারিটি কোণ উৎপন্ন হইবে, তাহার প্রত্যেকটি কোণের পরিমাণ চাঁদা দ্বারা নির্ণয় কর। এই প্রকার কয়েকটি চিত্র অঙ্কন করিয়া প্রত্যেক চিত্রের কোণগুলির পরিমাণ নির্ণয় কর। এইবার পরীক্ষা কর, প্রত্যেক চিত্রের কোণগুলির পরস্পর কোনও সম্বন্ধ আছে কিনা ?

পরীক্ষা ৩। কয়েকটি বিভিন্ন প্রকারের ত্রিভুজ অঙ্কন কর ; এবং প্রত্যেকটির কোণগুলির পরিমাণ নির্ণয় করিয়া সমষ্টি বাহির কর। প্রত্যেক ত্রিভুজের কোণগুলির পরিমাণের সমষ্টি পরীক্ষা করিয়া কি অনুমান করিতে পার ?

পরীক্ষা ৪। একটি অর্ধবৃত্ত অঙ্কিত কর। মনে কর, ইহার ব্যাসের নাম AB। বৃত্তের উপরে একটি বিন্দু C লও। $\angle ACB =$ কত ডিগ্রি ? ধর, D আর একটি বিন্দু। $\angle ADB =$ কত ডিগ্রি ? এই প্রকার আরও কয়েকটি বিন্দু E, F, G লইয়া $\angle AEB$, $\angle AFB$, $\angle AGB$ কোণগুলি মাপ। সকল কোণগুলির পরিমাণ পরীক্ষা করিয়া তোমার কি অনুমান হয় ?

(উপরে চিত্রপরীক্ষা দ্বারা জ্যামিতিক তথ্যানুসন্ধানের জন্য কয়েকটি পরীক্ষা দেওয়া হইল। শিক্ষক মহাশয় প্রয়োজন বোধ করিলে অনুরূপ প্রশ্ন গঠিত করিয়া ছাত্রদের অনুসন্ধান প্রবৃত্তি জন্মাইতে পারেন)

২৩। ঔপপত্তিক জ্যামিতির আবশ্যকতা

উক্ত পরীক্ষাগুলি দ্বারা তোমরা কোনও কোনও জ্যামিতিক তথ্য সম্বন্ধে অনুমান করিয়াছ এবং অনুরূপ আরও পরীক্ষা দ্বারা তোমাদের অনুমান সমর্থিত হইতে দেখিয়াছ; কিন্তু তোমাদের অনুমান প্রত্যেক ক্ষেত্রে নির্ভুল, একথা জোর করিয়া বলা চলে না। কারণ, তোমরা যে কয়টি চিত্র পরীক্ষা করিয়াছ তাহা দ্বারা তোমাদের অনুমান সমর্থিত হইলেও আরও অনুরূপ বহুচিত্র থাকিতে পারে, যাহা দ্বারা তোমাদের অনুমান সমর্থিত নাও হইতে পারে। অধিকন্তু, সরলরেখার অঙ্কন ও কোণের পরিমাণ নির্ণয় যে নির্ভুল হইতে পারে, ইহারও কোন নিশ্চয়তা নাই। সুতরাং, পরীক্ষাদ্বারা যাহা অনুমিত হয় তাহা যে একেবারেই নির্ভুল হইবে তাহা নিশ্চয় করিয়া বলা চলে না। **নির্ভুল যুক্তি দ্বারা যদি সমর্থিত হয়, তবেই অনুমানগুলি সত্য বলিয়া ধরা যাইতে পারে।** জ্যামিতির আলোচ্য বিষয়-গুলি নির্ভুল যুক্তি দ্বারা প্রতিষ্ঠিত হইলেই তাহাদিগকে সত্য বলিয়া স্বীকার করিতে হইবে।

২৪। ঔপপত্তিক জ্যামিতি

জ্যামিতির আলোচ্য বিষয়গুলির নাম **প্রতিজ্ঞা** (Proposition)।

প্রতিজ্ঞা দুই প্রকার—**উপপাদ্য** (Theorem) ও **সম্পাদ্য** (Problem)।

উপপাদ্য—এইরূপ প্রতিজ্ঞায় জ্যামিতিক সত্যকে যুক্তিদ্বারা প্রতিষ্ঠিত করিতে হয়।

সম্পাদ্য—এইরূপ প্রতিজ্ঞায় জ্যামিতিক কোন অঙ্কন করিয়া ও তাহার বিবরণ দিয়া যুক্তি দ্বারা তাহা প্রতিষ্ঠিত করিতে হয়।

কোন জ্যামিতিক প্রতিজ্ঞা যুক্তি দ্বারা সুচারুরূপে প্রতিষ্ঠিত করিবার জন্য ইহাকে নিম্ন প্রণালীতে ভাগ করা হয়—

১। **সাধারণ নির্বচন** (General Enunciation)—ইহা দ্বারা প্রতিজ্ঞার উদ্দেশ্য সরল ভাষায় ব্যক্ত হয়।

২। **বিশেষ নির্বচন** (Particular Enunciation)—ইহা দ্বারা আলোচ্য বিষয় চিত্রদ্বারা বিশেষভাবে ব্যাখ্যা করা হয়।

৩। **অঙ্কন** (Construction)—ইহা দ্বারা যুক্তির পক্ষে আবশ্যক অতিরিক্ত অঙ্কনগুলি করা হয়।

৪। **প্রমাণ** (Proof)—ইহা দ্বারা যুক্তিগুলি পর্যায়ক্রমে প্রয়োগ করিয়া যাহা প্রমাণিত হইবে তাহার প্রতিষ্ঠা করিতে হয়।

কোন প্রতিজ্ঞার সাধারণ নির্বচন পরীক্ষা করিলে দুইটি বিষয় লক্ষিত হয়—(১) জ্যামিতিক বস্তুগুলির মধ্যে সম্বন্ধ নির্দেশক কতকগুলি **স্বীকার** বা **কল্পনা** (Hypotheses, Data) সত্য বলিয়া ধরা হইয়াছে, এবং (২) এই সম্বন্ধ হইতে কি **সিদ্ধান্ত** (Conclusion) করা যাইবে তাহা দেওয়া আছে। সুতরাং, কোন প্রতিজ্ঞা আলোচনা করিবার পূর্বে স্বীকার ও সিদ্ধান্ত এই দুইটি বিষয়ের স্পষ্ট ধারণা হওয়া আবশ্যক। সম্পাদ্যের স্বীকৃত ভাগকে **উপাত্ত** (Data) বলে, ও অঙ্কন ভাগকে **করণীয়** (Quaesita) বলে।

সংজ্ঞা। কোন প্রতিজ্ঞার সিদ্ধান্ত হইতে যে অপর একটি সিদ্ধান্ত অতি সহজেই প্রমাণ করা যায় তাহাকে **অনুসিদ্ধান্ত** (Corollary) বলে।

২৫। **স্বতঃসিদ্ধ** (Axioms)—ইতঃপূর্বে বলা হইয়াছে যে জ্যামিতিক তথ্যগুলি যুক্তি দ্বারা সমর্থিত হইলে তাহা স্বীকার করা যাইতে পারে; কিন্তু যুক্তিগুলি আবার এমন কতকগুলি সিদ্ধান্তের উপর প্রতিষ্ঠিত করিতে হইবে, যাহাদের সম্বন্ধে কোন সন্দেহ থাকিতে পারে না। এমন কতকগুলি সিদ্ধান্ত আছে, যাহা এত স্বাভাবিক ও সহজবুদ্ধিগম্য যে, তাহাদের সত্যতা স্বীকার করিয়া লওয়া যাইতে পারে। এইরূপ স্বয়ংসিদ্ধ সিদ্ধান্তগুলির নাম **স্বতঃসিদ্ধ**। স্বতঃসিদ্ধের সূত্রগুলিতে যে 'বস্তু' কথাটির প্রয়োগ করা হয় তাহার অর্থ পরিমাণধর্মী বস্তু (Magnitude) বুঝিতে হইবে; যথা, রেখা, কোণ, ইত্যাদি।

নিম্নে কতকগুলি সাধারণ ও জ্যামিতিক স্বতঃসিদ্ধ প্রদত্ত হইল—

স্বতঃসিদ্ধ ১। সমান সমান বস্তুতে সমান সমান বস্তু যোগ করিলে যোগফল সমান হইবে।

স্বতঃসিদ্ধ ২। সমান সমান বস্তু হইতে সমান সমান বস্তু বিয়োগ করিলে বিয়োগফল সমান হইবে।

স্বতঃসিদ্ধ ৩। সমান সমান বস্তুর সমান গুণ বা সমান অংশ সমান হইবে।

স্বতঃসিদ্ধ ৪। কোন বস্তু ইহার অংশ হইতে বৃহত্তর।

স্বতঃসিদ্ধ ৫। সকল সমকোণের পরিমাণ সমান।

স্বতঃসিদ্ধ ৬। দুইটি সরলরেখা একটি সমতলক্ষেত্রকে সীমাবদ্ধ করিতে পারে না।

স্বতঃসিদ্ধ ৭। কোন বৃত্তের ব্যাসার্ধগুলি পরস্পর সমান।

২৬। **উপরিপাত** (Superposition) ও **সর্বসমতা** (Congruency)

(১) দুইটি সীমাবদ্ধ সরলরেখার একটিকে তুলিয়া অপরটির উপর স্থাপন করিলে যদি উভয়ের সীমাবিন্দু মিলিত হয় তবে সরলরেখা দুইটি পরস্পর সমান হইবে।

(২) একটি কোণের শীর্ষবিন্দু আর একটি কোণের শীর্ষবিন্দুর উপর রাখিলে যদি একটির বাহুদ্বয় অপরটির বাহুদ্বয়ের উপর পড়ে তবে কোণ দুইটি সমান হইবে।

(৩) একটি সমতলক্ষেত্র আর একটি সমতলক্ষেত্রের উপর স্থাপন করিলে যদি উভয়ের সীমারেখা ও সীমাবিন্দু পরস্পর মিলিয়া যায় তবে ক্ষেত্র দুইটি **সর্বসম** হইবে।

এই উপরিপাত প্রণালী দ্বারা একাধিক জ্যামিতিক বস্তুর সর্বসমতা প্রতিপন্ন করা যায়—কিন্তু এই সম্পর্কে স্বীকার করিয়া লইতে হইবে যে, যে-কোন জ্যামিতিক বস্তুকে ইহার আকার ও আয়তনের কোনরূপ পরিবর্তন না করিয়া স্থানচ্যুত করা যাইতে পারে। যদিও জ্যামিতিবিৎ য়ুক্লিড এইরূপ প্রণালী স্বতঃসিদ্ধ বলিয়া ধরেন নাই, তথাপি তিনি ইহার ব্যবহার করিয়াছেন। আমরা ইহাকে স্বতঃসিদ্ধ বলিয়া স্বীকার করিব।

স্বতঃসিদ্ধ ৮। কোন জ্যামিতিক বস্তুকে ইহার আকার ও আয়তনের পরিবর্তন না করিয়া স্থানচ্যুত করা যায়, এবং ঐরূপ স্থানচ্যুত করিয়া অপর একটি বস্তুর উপর উপরিপাত করিলে যদি উভয়ে অঙ্গাঙ্গি মিলিয়া যায় তবে বস্তু দুইটি সর্বসম হইবে।

২৭। স্বীকার্য বিষয় (Postulates)

জ্যামিতিক অঙ্কনে রুলার, কম্পাস প্রভৃতি যন্ত্র ব্যবহৃত হয়। ইহাদের সাহায্যে যে অঙ্কনগুলি করা যাইতে পারে বলিয়া স্বীকার করিয়া লওয়া হইয়াছে তাহা প্রদত্ত হইল—

রুলার সাহায্যে

(১) দুইটি বিন্দুকে সরলরেখা দ্বারা সংযুক্ত করা যাইতে পারে।

(২) কোন সীমাবদ্ধ সরলরেখাকে একই দিকে বা উভয় দিকে যথেচ্ছ বর্ধিত করা যাইতে পারে।

কম্পাস সাহায্যে

(১) কোন বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া ও যে কোন ব্যাসার্ধ লইয়া বৃত্ত অঙ্কন করা যাইতে পারে।

বিশুদ্ধ জ্যামিতিক অঙ্কনে মাত্র রুলার ও কম্পাস ব্যবহার করা হয়; ত্রিকোণী ও চাঁদার ব্যবহার নিষিদ্ধ। সম্পাদ্যগুলির সমাধানে মাত্র রুলার ও কম্পাস ব্যবহারই গ্রাহ্য হইয়া থাকে।

২৮। সাঙ্কেতিক চিহ্ন

জ্যামিতিক বস্তু বুঝাইতে নিম্নলিখিত সাঙ্কেতিক চিহ্ন ব্যবহৃত হইবে :

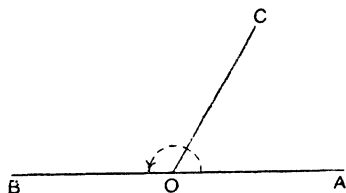
কোণ	বুঝাইতে	$\angle$
ত্রিভুজ	,,	$\triangle$
বৃত্ত	,,	$\odot$
বৃত্তের পরিধি	,,	$\odot$ ধি
সমান্তর ক্ষেত্র	,,	▱
যেহেতু	,,	$\because$
অতএব	,,	$\therefore$
সমান	,,	$=$
AB, CD হইতে বড়	,,	$AB > CD$
AB, CD হইতে ছোট	,,	$AB < CD$
AB, CDর সহিত সমান্তরাল	,,	$AB \parallel CD$
AB, CDর উপর লম্ব	,,	$AB \perp CD$
সর্বসম	,,	$\equiv$

দ্বিতীয় অধ্যায়

রেখা ও কোণ

উপপাদ্য ১ (Theorem 1)

সাধারণ নির্বচন। একটি সরলরেখা অপর একটি সরলরেখার একটি বিন্দুতে মিলিত হইলে যে দুইটি সন্নিহিত কোণ উৎপন্ন হয় তাহাদের সমষ্টি দুই সমকোণ হইবে।

[If one straight line meets another straight line, the sum of the two adjacent angles so formed is two right angles. *Euc.* 1. 13.]

চিত্র ২৫

বিশেষ নির্বচন। CO সরলরেখা AB সরলরেখার O বিন্দুতে মিলিত হইয়া দুইটি সন্নিহিত কোণ AOC ও COB উৎপন্ন করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে

$$\angle AOC + \angle COB = 2 \text{ সমকোণ।}$$

প্রমাণ। $\angle AOC + \angle COB = \angle AOB$,

কিন্তু, AOB একটি সরলরেখা;

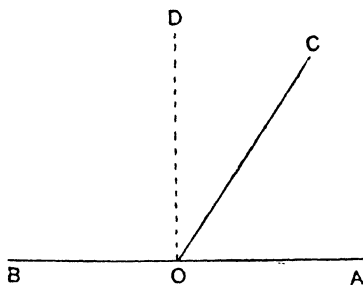
$\therefore \quad \angle AOB =$ সরলকোণ $= 2$ সমকোণ;

$\therefore \quad \angle AOC + \angle COB = \angle AOB = 2$ সমকোণ।

বিকল্প প্রমাণ। মনে কর, O বিন্দুতে ABর উপর OD লম্ব টানা গেল।

$\angle AOC = \angle AOD - \angle DOC,$

এবং, $\angle BOC = \angle BOD + \angle DOC$।

অতএব, $\angle AOC + \angle COB = \angle AOD + \angle DOB = 2$ সমকোণ।

চিত্র ২৫ (ক)

অনুসিদ্ধান্ত ১। কোন সরলরেখার একটি বিন্দু হইতে ইহার এক পার্শ্বে যদি কতকগুলি সরলরেখা টানা যায় তবে যে কোণগুলি উৎপন্ন হয় তাহাদের সমষ্টি দুই সমকোণ হইবে।

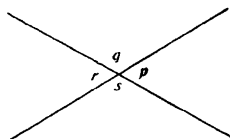
অনুসিদ্ধান্ত ২। দুইটি সরলরেখা পরস্পর ছেদ করিলে যে চারিটি কোণ উৎপন্ন হয় তাহাদের সমষ্টি চার সমকোণ।

[The four angles formed by tne intersection of two staight lines are together equal to four right angles.]

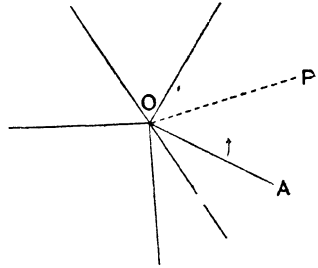
$\angle p + \angle q = 2$ সমকোণ ;

আবার, $\angle r + \angle s = 2$ সমকোণ ;

$\therefore \quad \angle p + \angle q + \angle r + \angle s$

$= 4$ সমকোণ।

চিত্র ২৬

অনুসিদ্ধান্ত ৩। কোণ একটি বিন্দুতে একাধিক সরলরেখা মিলিত হইলে যে কোণগুলি উৎপন্ন হয় তাহাদের সমষ্টি চার সমকোণ।

কতকগুলি সরলরেখা O বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে; ইহাদের একটি OA। মনে কর, একটি রেখা OP, OA হইতে আরম্ভ করিয়া O এর চতুর্দিকে ঘুরিয়া পুনরায় OA এর সহিত মিশিল। OP রেখাটি O এর চতুর্দিকে পূর্ণ একপাক ঘুরিয়া আসায় O বিন্দুতে যতগুলি কোণ উৎপন্ন হইয়াছে সবগুলি অতিক্রম করিয়াছে। অতএব, ঐ কোণগুলির সমষ্টি চার সমকোণ হইবে।

চিত্র ২৭

২৯। সম্পূরক ও পূরক কোণ

যদি দুইটি কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ হয় তবে একটিকে অপরটির **সম্পূরক** (Supplementary) **কোণ** বলে।

২৫ চিত্রে $\angle AOC + \angle COB = 2$ সমকোণ,

অতএব, $\angle AOC$ ও $\angle COB$ পরস্পর সম্পূরক কোণ।

যদি দুইটি কোণের সমষ্টি এক সমকোণ হয় তবে একটিকে অপরটির **পূরক** (Complementary) **কোণ** বলে।

২৫ (ক) চিত্রে $\angle AOC + \angle COD =$ সমকোণ

অতএব $\angle AOC$ ও $\angle COD$ পরস্পর পূরক কোণ।

উদাহরণ। একটি কোণের পরিমাণ যদি $60°$ হয়, তবে ইহার সম্পূরক কোণ $= 180° - 60° = 120°$, ও পূরক কোণ $= 90° - 60° = 30°$ হইবে।

মন্তব্য। সমান সমান কোণের সম্পূরক কোণগুলি পরস্পর সমান, এবং সমান সমান কোণের পূরক কোণগুলি পরস্পর সমান।

অনুশীলনী ৪

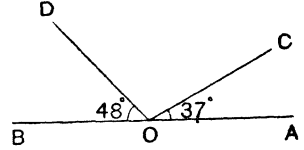
১। নিম্নলিখিত কোণগুলির সম্পূরক এবং সম্ভবস্থলে পূরক কোণের পরিমাণ কত?

$30°, 45°, 46° 12'$, $129°, 135° 23' 5''$।

২। AOB একটি সরলরেখা,

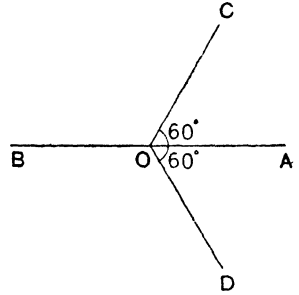
$\angle AOC = 37°$;

$\angle BOD = 48°$;

$\angle COD =$ কত ডিগ্রি?

চিত্র ২৮

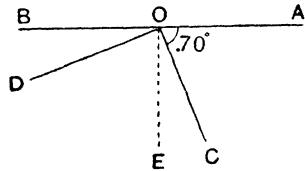
৩। (চিত্র ২৯) $\angle AOC = \angle AOD = 60°$

$\angle BOC$ ও $\angle BOD$

প্রত্যেকে কত ডিগ্রি?

চিত্র ২৯

৪। (চিত্র ৩০) AOB একটি সরলরেখা।

$\angle AOC = 70°$; $CO \perp DO$।

$\angle BOD =$ কত ডিগ্রি?

৫। ৪নং প্রশ্নের চিত্রে অধিকন্তু

$OE \perp BA$। $\angle EOD =$ কত?

চিত্র ৩০

৬। AOB একটি সরলরেখা (চিত্র ৩১)। OP, AOC কোণের এবং OQ, BOC কোণের সমদ্বিখণ্ডক। যদি $\angle AOP = 30°$ এবং $\angle COQ = 60°$;

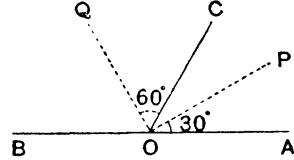
$\angle COP + \angle BOQ =$ কত ডিগ্রি? এবং $\angle POQ =$ কত ডিগ্রি?

৭। AOC একটি কোণ। OP ইহাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। AO বাহুকে B পর্যন্ত বর্ধিত করিলে COB কোণ উৎপন্ন হয়, OQ এই বহিঃস্থ কোণের সমদ্বিখণ্ডক। প্রমাণ কর $\angle POQ$ = এক সমকোণ। (৩১ চিত্র দ্রষ্টব্য)

$\angle POQ = \angle POC + \angle QOC$

$= \frac{1}{2}\angle AOC + \frac{1}{2}\angle BOC$

$= \frac{1}{2}(\angle AOC + \angle BOC)$

$= \frac{1}{2} \times 2$ সমকোণ = এক সমকোণ।

চিত্র ৩১

সংজ্ঞা। OPকে AOC কোণের **অন্তর্দ্বিখণ্ডক** (Internal Bisector) ও OQকে ইহার **বহির্দ্বিখণ্ডক** (External Bisector) বলে। সংজ্ঞানুসারে যুক্তিমূলক অনুশীলনীটি এইরূপ হইবে—

কোন কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক ও বহির্দ্বিখণ্ডক রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভূ্ত কোণটি সমকোণ হইবে।

[The angle between the internal and external bisectors of an angle is a right angle.]

৮। AOB একটি সূক্ষ্মকোণ; কি প্রকারে অতিসহজেই ইহার সম্পূরক কোণটি অঙ্কিত করা যায়?

৯। ABC ও DEF দুইটি সমান কোণ। ABC কোণের AB বাহুকে G পর্যন্ত বর্ধিত কর, এবং DEF কোণের FE বাহুকে H পর্যন্ত বর্ধিত কর। প্রমাণ কর $\angle CBG = \angle DEH$।

১০। দুইটি সম্পূরক কোণের একটি অপরটির তিনগুণ হইলে কোণ দুইটি কত ডিগ্রি হইবে?

১১। দুইটি পূরক কোণের একটি অপরটির চারগুণ হইলে কোণ দুইটি কত ডিগ্রি হইবে?

১২। দুইটি সূক্ষ্মকোণ পরস্পর সম্পূরক হইতে পারে কি ?

১৩। দুইটি স্থূলকোণ পরস্পর সম্পূরক হইতে পারে কি ?

১৪। একটি সূক্ষ্মকোণের পূরক কোন স্থূলকোণ হইতে পারে কি ?

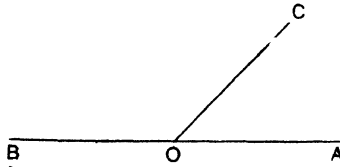
১৫। OX রেখার একই পার্শ্বে XOA, XOB দুইটি কোণ আছে; OC রেখা $\angle AOB$-এর অন্তর্দ্বিখণ্ডক। প্রমাণ কর $\angle XOA + \angle XOB = 2\angle XOC$।

১৬। AOX, XOB দুইটি সন্নিহিত কোণ, তন্মধ্যে $\angle AOX$ বৃহত্তর এবং OC, $\angle AOB$ এর অন্তর্দ্বিখণ্ডক। প্রমাণ কর $\angle AOX - \angle XOB = 2\angle COX$।

———

উপপাদ্য ২ (Theorem 2)

দুইটি সন্নিহিত কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ হইলে উহাদের বহিঃস্থ বাহুদ্বয় একই সরলরেখায় থাকিবে।

[If the sum of two adjacent angles is two right angles then the exterior arms of the angles lie in one straight line. *Euc.* 1. 14.]

চিত্র ৩২

AOC এবং ∠ BOC দুইটি সন্নিহিত কোণ

স্বীকার। ∠AOC+∠BOC=2 সমকোণ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, OA এবং OB একই সরলরেখায় অবস্থিত।

প্রমাণ। ∠AOC+∠BOC=2 সমকোণ। (স্বীকার)

কিন্তু, ∠AOC+∠BOC=∠AOB;

∴ ∠AOB=2 সমকোণ=সরলকোণ;

∴ OA এবং OB একই সরলরেখায় অবস্থিত।

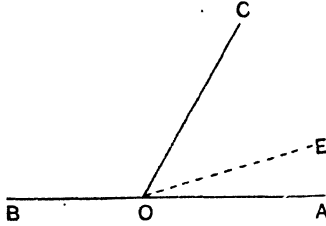
বিকল্প প্রমাণ। মনে কর, OA এবং OB একই সরলরেখায় অবস্থিত নয়; তাহা হইলে BOএর বর্ধিতাংশ OE, OA হইতে স্বতন্ত্র।

[৩০ পৃষ্ঠায় চিত্র ৩২ (ক) দেখ]

∵ CO রেখা BOE সরলরেখায় মিলিত হইয়াছে,

∴ ∠BOC+∠COE=2 সমকোণ। (উপ. ১)

কিন্তু, স্বীকার যে, $\angle BOC + \angle COA = 2$ সমকোণ।

$\therefore \angle COE = \angle COA$।

চিত্র ৩২ (ক)

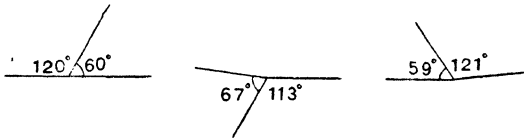
কিন্তু, $\angle COE$, $\angle COA$ এর একটি অংশ ;

$\therefore$ অংশ সমগ্র বস্তুর সমান, ইহা অসম্ভব।

অতএব, OA এবং OB একই সরলরেখায় অবস্থিত।

অনুসিদ্ধান্ত। OC সরলরেখার O বিন্দু হইতে ইহার বিপরীত দিকে যদি OP ও OQ দুইটি লম্ব টানা যায়, তবে OP ও OQ একই সরলরেখায় অবস্থিত হইবে।

অনুশীলনী ৫

১। নিম্ন চিত্রগুলির কয়েকটি ভুল আঁকা হইয়াছে। চাঁদা ব্যবহার না করিয়া কোন্ কোন্ চিত্রটি ভুল তাহা বল এবং কারণ নির্দেশ কর।

চিত্র ৩৩

২। দুইটি সন্নিহিত কোণের সমদ্বিখণ্ডক সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুত কোণ সমকোণ হইলে উহাদের বহিঃস্থ বাহুদ্বয় সমরেখ হইবে।

৩। দুইটি পরস্পরচ্ছেদী সরলরেখা যে চারিটি কোণ উৎপন্ন করে তাহাদের দ্বিখণ্ডকগুলি পরস্পর সমকোণে নত হয়।

৩০। বিপরীত প্রতিজ্ঞা

প্রথম ও দ্বিতীয় উপপাদ্য দুইটির নির্বচন লক্ষ্য করিলে স্পষ্ট বোধ হয় যে, প্রথমটিতে যাহা দেওয়া আছে দ্বিতীয়টিতে তাহা প্রমাণ করিতে হইবে, এবং প্রথমটিতে যাহা প্রমাণ করিতে হইবে দ্বিতীয়টিতে তাহাই দেওয়া আছে। যদি প্রতিজ্ঞার কল্পনা ও সিদ্ধান্ত যথাক্রমে অপর একটি প্রতিজ্ঞার সিদ্ধান্ত ও কল্পনা হয়, তবে প্রতিজ্ঞাদ্বয়ের একটিকে অপরটির **বিপরীত প্রতিজ্ঞা** (Converse) বলা হয়।

প্রথম উপপাদ্যের স্বীকার OA এবং OB একই সরলরেখা এবং সিদ্ধান্ত $\angle AOC + \angle BOC = 2$ সমকোণ; দ্বিতীয় উপপাদ্যের স্বীকার $\angle AOC + \angle BOC = 2$ সমকোণ এবং সিদ্ধান্ত OA এবং OB একই সরলরেখা।

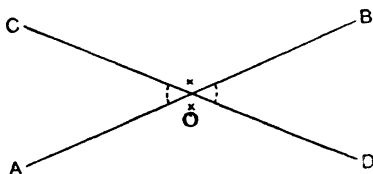
অতএব, দ্বিতীয় উপপাদ্য প্রথম উপপাদ্যের বিপরীত।

মন্তব্য। কোন উপপাদ্য সত্য হইলে উহার বিপরীত উপপাদ্য সব সময় সত্য না হইতেও পারে। যথাস্থানে এই বিষয়ে দৃষ্টি আকর্ষণ করা হইবে। উদাহরণ স্থলে, ৭ উপপাদ্য, দ্রষ্টব্য ৩ দেখ।

——

উপপাদ্য ৩ (Theorem 3)

দুইটি সরলরেখা পরস্পর ছেদ করিলে বিপ্রতীপ কোণগুলি পরস্পর সমান হইবে।

[If two straight lines intersect, the vertically opposite angles are equal, *Euc.* **1**. 15.]

চিত্র ৩৪

AB ও CD দুইটি সরলরেখা পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে

$$\angle AOC = \angle BOD$$

এবং $\angle BOC = \angle AOD$।

প্রমাণ। CO সরলরেখা AB সরলরেখার সহিত O বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে,

$\therefore$ $\angle AOC + \angle BOC = 2$ সমকোণ ; (উপ. ১)

আবার, BO সরলরেখা CD সরলরেখার সহিত O বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে,

$\therefore$ $\angle BOC + \angle BOD = 2$ সমকোণ ; (উপ. ১)

$\therefore$ $\angle AOC + \angle BOC = \angle BOC + \angle BOD$; (স্বতঃ. ১)

এই দুই সমান বস্তু হইতে $\angle BOC$ বাদ দাও ; তাহা হইলে,

অবশিষ্ট $\angle AOC$ = অবশিষ্ট $\angle BOD$। (স্বতঃ. ২)

এই প্রকারেই প্রমাণ করা যায়—

$$\angle BOC = \angle AOD$$।

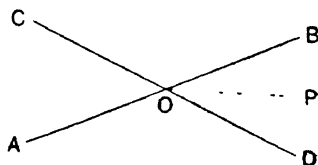
বিকল্প প্রমাণ। মনে কর, O বিন্দু স্থির থাকিয়া AOB সরলরেখা O এর চতুর্দিকে ঘুরিয়া COD এর সহিত মিশিল। AOB রেখা সরলরেখা বলিয়া যে সময়ে ইহার OB অংশ OC এর সহিত মিশিবে, সেই সময়ে OA অংশ OD এর সহিত মিশিবে। সুতরাং, OB ও OA র ঘূর্ণনের পরিমাণ সমান।

$\therefore \quad \angle BOC = \angle AOD$।

অনুশীলনী ৬

১। উপপাদ্য ৩ এর চিত্রে $\angle AOC = 30^\circ$ হইলে, অপর তিনটি কোণের পরিমাণ কত হইবে ?

২। ঐ চিত্রে $\angle BOC = x^\circ$ হইলে, অপর তিনটি কোণের পরিমাণ কত হইবে ?

৩। AB ও CD দুইটি সরলরেখা। PO সরলরেখা $\angle BOD$র সমদ্বিখণ্ডক। যদি $\angle BOP = 15^\circ$ হয়, তবে $\angle BOC =$ কত ডিগ্রি ? (চিত্র, ৩৫)

চিত্র ৩৫

প্রমাণ কর যে, POকে বর্ধিত করিলে $\angle BOD$ র বিপ্রতীপ $\angle AOC$ও সমান দুই ভাগে বিভক্ত হইবে।

৪। যদি CD রেখার O বিন্দুতে BO, AO রেখাদ্বয় CDর বিপরীত দিক হইতে মিলিত হয় এবং $\angle BOD = \angle AOC$ হয়, তবে BO, AO একরেখায় থাকিবে (প্রশ্ন ৩এর চিত্র দেখ)।

৫। যদি দুইটি সরলরেখা একটি বিন্দুতে ছেদ করিয়া চারিটি কোণ সৃষ্টি করে, এবং কোণচতুষ্টয়ের একটি সমকোণ হয় তবে অপর তিনটি কোণও প্রত্যেকে এক একটি সমকোণ হইবে।

৬। A, B, C, D চারিটি বিন্দু; AB, BC সরলরেখাদ্বয় D বিন্দুতে দুইটি সম্পূরক সংমুখ কোণ উৎপন্ন করিয়াছে। প্রমাণ কর যে A, D, C বিন্দুত্রয় একই সরলরেখায় অবস্থিত থাকিবে।

৭। প্রমাণ কর যে দুইটি বিপ্রতীপ কোণের সমদ্বিখণ্ডক রেখাদ্বয় একই সরলরেখা। (The bisectors of the vertically opposite angles are in the same straight line).

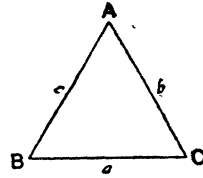
তৃতীয় অধ্যায়

ঋজুরেখ ক্ষেত্র

৩১। বিবিধ সংজ্ঞা

সরলরেখা দ্বারা সামতলিক ক্ষেত্রের কোন অংশ সীমাবদ্ধ হইলে ক্ষেত্রটিকে **ঋজুরেখ ক্ষেত্র** (Plane Rectilineal figure) বলে ; এবং উক্ত সীমাবদ্ধ সরলরেখাগুলিকে ঐ ক্ষেত্রের **ভুজ** বা **বাহু** (Side) বলে। ঋজুরেখ ক্ষেত্রের বাহুগুলির দৈর্ঘ্যের সমষ্টিকে উহার **পরিসীমা** (Perimeter) বলে ; এবং সীমাবদ্ধ স্থানের পরিমাণকে ঐ ক্ষেত্রের **কালি** বা **ক্ষেত্রফল** (Area) বলে।

৩২। ত্রিভুজ

তিনটি সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ সমতল ক্ষেত্রকে **ত্রিভুজ** (Triangle) বলে। যথা, ৩৬ চিত্রে ABC একটি ত্রিভুজ। AB, BC ও CA ইহার তিনটি বাহু এবং A,B ও C কৌণিকবিন্দুত্রয় ইহার তিনটি **শীর্ষ** (Vertex)। BC, CA ও AB বাহুগুলি যথাক্রমে ∠A, ∠B ও ∠C এর বিপরীত দিকে থাকায় ইহাদের যথাক্রমে a, b ও c বাহু বলা হইয়া থাকে।

চিত্র ৩৬

কখনও কখনও ত্রিভুজের একটি বাহুকে **ভুমি** (Base) বলা হয়, তখন তাহার বিপরীত কৌণিক বিন্দুকে ত্রিভুজের **শীর্ষ** (Vertex) বলিতে হইবে। চিত্রে BC বাহুকে ভূমি বলিলে, তদ্বিপরীত কৌণিক বিন্দু Aকে ত্রিভুজের শীর্ষ বলিতে হইবে। ∠B ও ∠C এই দুইটিকে **ভৌমিক কোণ** বলা যাইতে পারে।

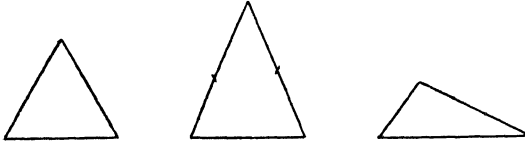
ত্রিভুজের ছয়টি **অঙ্গ** (parts, elements) আছে ; যথা, তিনটি বাহু ও তিনটি কোণ।

(ক) বাহুভেদে ত্রিভুজ তিন প্রকার—

(১) **সমবাহু ত্রিভুজ** (Equilateral Triangle)—যে ত্রিভুজের তিনটি বাহুই পরস্পর সমান তাহাকে সমবাহু ত্রিভুজ বলে।

(২) **সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ** (Isosceles Triangle)—যে ত্রিভুজের দুইটি বাহু পরস্পর সমান তাহাকে সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ বলে।

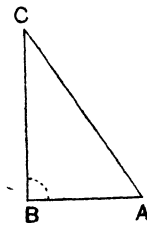
সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান দুইটি বাহু যে কৌণিক বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করে তাহাকে ত্রিভুজটির 'শীর্ষ' (Vertex) বলা হয়, এবং তদ্বিপরীত বাহুকে 'ভুমি' ও শীর্ষস্থ কোণটিকে ইহার 'শীর্ষকোণ' (Vertical angle) বলা হয়।

(৩) **বিষমবাহু ত্রিভুজ** (Scalene Triangle)—যে ত্রিভুজের তিনটি বাহুই পরস্পর অসমান তাহাকে বিষমবাহু ত্রিভুজ বলে।

সমবাহু সমদ্বিবাহু বিষমবাহু

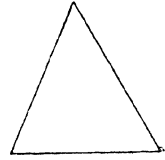
চিত্র ৩৭

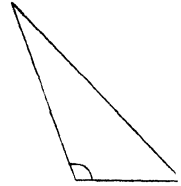
(খ) কোণভেদেও ত্রিভুজ তিন প্রকার—

(১) **সমকোণী ত্রিভুজ** (Right-angled Triangle)—যে ত্রিভুজের একটি কোণ সমকোণ, তাহাকে সমকোণী ত্রিভুজ বলে।

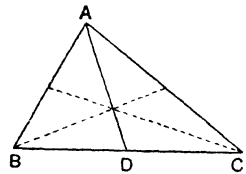
সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণের বিপরীত বাহুকে ইহার **অতিভুজ** বা কর্ণ (Hypotenuse) বলে।

চিত্র ৩৮

চিত্রে ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ। ইহার ∠ABC সমকোণ এবং ইহার বিপরীত বাহু AC ত্রিভুজটির অতিভুজ।

(২) **সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ** (Acute-angled Triangle)—যে ত্রিভুজের তিনটি কোণই সূক্ষ্মকোণ তাহাকে সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ বলে। (চিত্র ৩৯)

চিত্র ৩৯

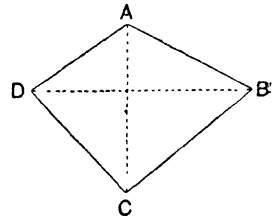
(৩) **স্থূলকোণী ত্রিভুজ** (Obtuse-angled Triangle)—যে ত্রিভুজের একটি কোণ স্থূলকোণ তাহাকে স্থূলকোণী ত্রিভুজ বলে। (চিত্র ৪০)

চিত্র ৪০

৩৩। **মধ্যমা** (Median)

যে সরলরেখা ত্রিভুজের একটি শীর্ষবিন্দু ও তদ্বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দু সংযুক্ত করে তাহাকে ঐ ত্রিভুজের **মধ্যমা** বলে। ৪১ চিত্রে ABC ত্রিভুজের D বিন্দু যদি BCর মধ্যবিন্দু হয় তবে AD সরলরেখা ইহার মধ্যমা। প্রত্যেক ত্রিভুজের তিনটি মধ্যমা আছে।

চিত্র ৪১

৩৪। **চতুর্ভুজ** (Quadrilateral)

চারিটি সরলরেখা দ্বারা বেষ্টিত সমতল ক্ষেত্রের নাম **চতুর্ভুজ**। ৪২ চিত্রে ABCD একটি চতুর্ভুজ, ইহার চারিটি বাহু এবং চারিটি কোণ।

যে সরলরেখা চতুর্ভুজের দুইটি বিপরীত কৌণিক বিন্দুকে সংযুক্ত করে তাহাকে ইহার **কর্ণ** (Diagonal) বলে। যথা, AC ও BD দুইটি কর্ণ।

চিত্র ৪২

৩৫। **বহুভুজ** (Polygon)—চারিটির অধিক সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের সাধারণ নাম **বহুভুজ**। স্পষ্টত, বাহুর সংখ্যা পাঁচটি হইলে ক্ষেত্রটিকে **পঞ্চভুজ** (Pentagon), ছয়টি হইলে **ষড়ভুজ** (Hexagon), সাতটি হইলে **সপ্তভুজ** (Heptagon), আটটি হইলে **অষ্টভুজ** (Octagon), ইত্যাদি ক্রমে অভিহিত করা হয়।

ঋজুরেখ ক্ষেত্রের সকল বাহু সমান হইলে তাহাকে **সমবাহু** (Equilateral) এবং সকল কোণ সমান হইলে তাহাকে **সদৃশকোণী** (Equiangular) ক্ষেত্র বলে। যথা, সমবাহু বহুভুজ, সদৃশকোণী ষড়ভুজ, ইত্যাদি।

৩৬। **সুষমক্ষেত্র** (Regular figure)—কোন ঋজুরেখ ক্ষেত্রের বাহুগুলি পরস্পর সমান এবং কোণগুলিও পরস্পর সমান হইলে তাহাকে **সুষমক্ষেত্র** বলে। যথা, সুষম বহুভুজ, সুষম পঞ্চভুজ, ইত্যাদি।

দুইটি ত্রিভুজের সর্বসমতা

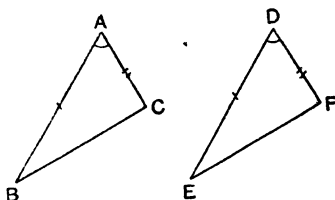
৩৭। পূর্বে উক্ত হইয়াছে যে ত্রিভুজমাত্রেরই ছয়টি অঙ্গ—তিনটি বাহু ও তিনটি কোণ।

দুইটি ত্রিভুজের একটি অপরটির উপর যথাযথ হিসাবে স্থাপন করিলে যদি উক্ত ছয়টি অঙ্গ পরস্পর সর্বতোভাবে মিলিয়া যায়, তবে ত্রিভুজ দুইটি **সর্বসম** (Identically equal or Congruent) হইবে। ইহাতে ত্রিভুজ দুইটির ক্ষেত্রফল (Area) ও সমান হইবে।

এইরূপ সর্বসম দুইটি ত্রিভুজের সমান সমান বাহুর বিপরীত কোণগুলিকে **অনুরূপ** (Corresponding) **কোণ** এবং সমান সমান কোণের বিপরীত বাহুগুলিকে **অনুরূপ বাহু** বলে।

উপপাদ্য ৪ (Theorem 4)

দুইটি ত্রিভুজের একটির দুই বাহু যথাক্রমে অপরটির দুই বাহুর সহিত সমান হইলে এবং ঐ বাহু দুইটির অন্তর্ভূ্ত কোণ দুইটিও পরস্পর সমান হইলে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হইবে।

[If two tringles have two sides of the one equal to two sides of the other, each to each, and the angles included by those sides are equal, the triangles are congruent. *Euc*. 1. 4.]

চিত্র ৪৩

ABC ও DEF এই দুইটি ত্রিভুজের

AB = DE

AC = DF

এবং অন্তর্ভূ্ত ∠BAC = অন্তর্ভূ্ত ∠EDF।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

△ABC ও △DEF সর্বসম।

প্রমাণ। △ABCকে △DEF এর উপর এমনভাবে স্থাপন কর যেন, A বিন্দু D বিন্দুর উপর এবং AB বাহু DE বাহুর উপর পড়ে।

∵ AB = DE,

সুতরাং, B বিন্দু E বিন্দুর উপর পড়িবে।

আবার, BA বাহু ED বাহুর উপর পতিত

এবং ∠BAC = ∠EDF ; (স্বীকার)

সুতরাং, AC বাহু DF বাহুর উপর পড়িবে।

এবং ∵ AC = DF,

∴ C বিন্দু F বিন্দুর উপর পড়িবে।

এখন, যেহেতু B বিন্দু E এর উপর এবং C বিন্দু F এর উপর পতিত ;
অতএব, BC বাহু EF বাহুর উপর পড়িবে।

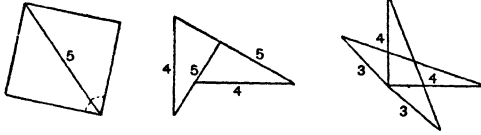
সুতরাং, $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ এর সহিত সর্বতোভাবে মিলিয়া যাইবে।

$\therefore$ $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ সর্বসম।

দ্রষ্টব্য ১। $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ এ স্বীকার করিয়া লওয়া হইয়াছে যে (1) $AB = DE$, (2) $AC = DF$, (3) $\angle BAC = \angle EDF$, এবং সিদ্ধান্ত হইল—ত্রিভুজদুইটি সর্বসম ; অর্থাৎ (4) $BC = EF$, (5) $\angle ABC = \angle DEF$, (6) $\angle ACB = \angle DFE$ এবং (7) ত্রিভুজ দুইটির ক্ষেত্রফলও সমান।

২। $AB = DE$, এবং ABর বিপরীত কোণ ACB ও DEর বিপরীত কোণ DFE পরস্পর সমান, অর্থাৎ অনুরূপ বাহুর বিপরীত কোণগুলি সমান।

অনুশীলনী ৭

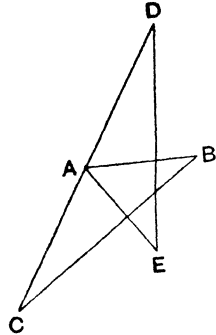
১। নিম্ন চিত্রগুলিতে যে সকল ত্রিভুজ আছে তাহাদের দুইটি অঙ্গের সমতা, পরিমাণ অথবা চিহ্ন দ্বারা সূচিত আছে ; অপর কোন্ অঙ্গটি সমান হইলে ত্রিভুজগুলি সর্বসম হইবে তাহা বল।

চিত্র ৪৪

২। ABC ও DEF দুইটি ত্রিভুজ, ইহাদের $AB = DE = 3''$, $BC = DF = 4''$ $\angle BAC = \angle EDF = 30^\circ$। ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হইবে কি না পরীক্ষা কর।

৩। ৪৫ চিত্রে $AB = AE$, $AC = AD$ এবং $\angle CAE = \angle DAB$; প্রমাণ কর যে, $\triangle ABC = \triangle ADE$; এবং যদি $\angle D = 30^\circ$ হয়, তবে চিত্রের আর কোন কোণটি 30° হইবে ?

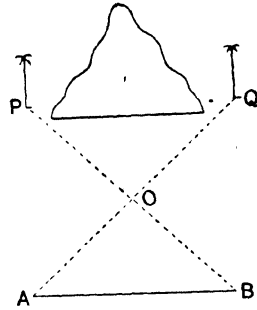
চিত্র ৪৫

৪। AB সরলরেখার মধ্যবিন্দু O এবং OX রেখা ABর উপর লম্ব। প্রমাণ কর OX এর যে কোন বিন্দু A ও B হইতে সমান দূরে অবস্থিত।

৫। ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ ; ইহার $AB = AC$। AB কে P পর্যন্ত এবং ACকে Q পর্যন্ত বর্ধিত কর। যদি $BP = CQ$ হয়, তবে প্রমাণ কর $CP = BQ$।

৬। ABCD একটি বর্গক্ষেত্র। AB বাহুর মধ্যবিন্দু O ; প্রমাণ কর OC=OD এবং ∠AOD=∠BOC।

সংজ্ঞা। বর্গক্ষেত্র একটি চতুর্ভুজ—ইহার চারিটি বাহু পরস্পর সমান এবং প্রত্যেকটি কোণ সমকোণ।

৭। প্রমাণ কর যে সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষকোণের সমদ্বিখণ্ডক রেখা (১) ভূমিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে, এবং (২) ভূমির উপর লম্ব হয়। [Prove that the bisector of the vertical angle of an isosceles triangle bisects the base at right angles.]

৮। P ও Q এর স্থানে দুইটি গাছ এবং ইহাদের মাঝখানে পাহাড়ের মত উচু জমি। P ও Q সরলরেখা দ্বারা যোগ করা যায় না। কি প্রকারে P ও Q এর ব্যবধান নির্ণয় করিতে হইবে দেখাও। (চিত্র ৪৬ দেখ)

(ইঙ্গিত। POB, QOA সরলরেখা ; PO=OB,QO=OA ; তাহা হইলেই AB=PQ হইবে)।

চিত্র ৪৬

৯। ABC একটি ত্রিভুজ এবং D, BC বাহুর মধ্যবিন্দু। AD যোগকর এবং ইহার সমান করিয়া ইহাকে E পর্যন্ত বর্ধিত কর। প্রমাণ কর যে ΔADB≡ΔEDC, ∠ABC ΔDECএর কোন্ কোণটির সহিত সমান ?

১০। ABC ত্রিভুজের AB ও ACর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে দুইটি লম্ব টানা হইলে যদি উহারা O বিন্দুতে ছেদ করে, তবে দেখাও যে OA=OB=OC।

১১। যদি দুইটি সরলরেখা AB, CD পরস্পরের লম্বদ্বিখণ্ডক হয়, তবে AD, DB, BC, CA যোগ করিলে যে চতুর্ভুজটি হইবে তাহার বাহুগুলি পরস্পর সমান।

১২। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ ABCর AB=AC ; X ও Y যথাক্রমে AB ও ACর উপর লও যেন AX=AY হয়। প্রমাণ কর

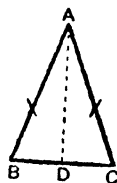
(ক) ΔAXC ও ΔAYB সর্বসম ;

(খ) ΔBXC ও ΔCYB সর্বসম ;

(গ) ∠ABC=∠ACB।

উপপাদ্য ৫ (Theorem 5)

একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহু পরস্পর সমান হইলে, ইহাদের বিপরীত কোণ দুইটিও পরস্পর সমান হইবে।

[If two sides of a triangle are equal, then the angles opposite to these two sides are also equal. *Euc.* 1. 5.]

চিত্র ৪৭

ABC একটি ত্রিভুজ, ইহার AB বাহু = AC বাহু।

প্রমাণ করিতে হইবে যে

$\angle ACB = \angle ABC$।

অঙ্কন। মনে কর, AD রেখা $\angle BAC$ কে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়া BC কে D বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

প্রমাণ। ABD ও ACD এই দুইটি ত্রিভুজের

$AB = AC$ (স্বীকার)

AD উভয়ের সাধারণ বাহু

এবং অন্তর্ভূত $\angle BAD =$ অন্তর্ভূত $\angle CAD$; (অঙ্কন)

$\therefore$ $\triangle ABD$ ও $\angle ACD$ সর্বসম। (উপ. ৪)

$\therefore$ $\angle ABC = \angle ACD$।

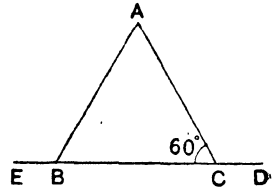
মন্তব্য। $\triangle ABD$ ও $\triangle ACD$ সর্বসম, অতএব $\angle ADB = \angle ADC$ এবং ইহারা সন্নিহিত কোণ; $\therefore$ $\angle ADB = \angle ADC = 90°$; আরও $BD = CD$। (পূর্ব অনুশীলনীর প্রশ্ন ৭ দ্রষ্টব্য)

অনুসিদ্ধান্ত ১। একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান বাহু দুইটি বর্ধিত করিলে ভূমির সহিত যে দুইটি বহিঃস্থ কোণ উৎপন্ন হয় তাহারা পরস্পর সমান।

অনুসিদ্ধান্ত ২। সমবাহু ত্রিভুজের কোণগুলি পরস্পর সমান।

অনুশীলনী ৮

১। কয়েকটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ আঁকিয়া ইহাদের প্রত্যেকের কোণ গুলির কোন্ দুইটি পরস্পর সমান নির্দেশ কর।

২। ৪৮ চিত্রে AB=AC এবং ∠ACB=60° ; ∠ABE =কত ডিগ্রি ?

চিত্র ৪৮

৩। ABC ও DBC দুইটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ, সাধারণ ভূমি BCর একদিকে বা উভয়-দিকে অঙ্কিত। প্রমাণ কর, ∠ABD=∠ACD।

৪। ABCD একটি চতুর্ভুজ। ইহার সকল বাহুই সমান। BD ইহার একটি কর্ণ। প্রমাণ কর—(১) ∠ABD=∠ADB ; (২) ∠CBD=∠CDB, এবং (৩) ∠ABC =∠ADC।

৫। AB একটি সরলরেখা এবং O ইহার মধ্যবিন্দু। O হইতে OA এর সহিত সমান করিয়া যে কোন একটি রেখা OC টান। AC ও BC যোগ কর। প্রমাণ কর, ∠ACB= ∠CAB+∠CBA।

৬। একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দু যোগ করিলে যে ত্রিভুজটি উৎপন্ন হয় তাহাও সমদ্বিবাহু হইবে।

৭। একটি সমবাহু ত্রিভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দু যোগ করিলে যে ত্রিভুজ হয় তাহাও সমবাহু হইবে।

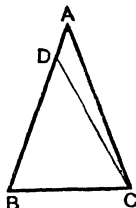
[The triangle formed by joining the middle points of the sides of an equilateral triangle is also equilateral]

৮। ABCDEF একটি সুষম ষড়ভুজ; প্রমাণ কর ACE ত্রিভুজটি সমবাহু। (কঃ প্রঃ ১৯১৮, ১৯২১)

উপপাদ্য ৬ (Theorem 6)

কোন ত্রিভুজের দুইটি কোণ পরস্পর সমান হইলে উহাদের বিপরীত বাহুদ্বয়ও পরস্পর সমান হইবে।

[If two angles of a triangle are equal, then the sides opposite to these equal angles are also equal. *Euc.* 1. 6.]

চিত্র ৪৯

ABC একটি ত্রিভুজ ; ইহার ∠ABC = ∠ACB।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, AB = AC।

যদি AB ও AC সমান না হয়, মনে কর, AB > AC।

AB হইতে ACর সমান করিয়া BD অংশ কাটিয়া লও।

DC যোগ কর।

প্রমাণ। ABC ও DBC এই দুইটি ত্রিভুজের

AC = DB (অঙ্কন)

BC সাধারণ বাহু

এবং অন্তর্ভূর্ত ∠ACB = অন্তর্ভূর্ত ∠DBC ; (স্বীকার)

সুতরাং △ABC ও △DBC সর্বসম

এবং ইহাদের ক্ষেত্রফলও সমান।

কিন্তু স্পষ্টতঃ, △DBC, △ABCর অংশ,

অতএব, ইহাদের ক্ষেত্রফল সমান হইতে পারে না।

∴ AB ও AC অসমান নয় ;

∴ AB = AC।

অনুসিদ্ধান্ত। একটি ত্রিভুজের কোণগুলি পরস্পর সমান হইলে বাহুগুলিও পরস্পর সমান হইবে।

মন্তব্য ১। এই ষষ্ঠ উপপাদ্যটি পঞ্চম উপপাদ্যের বিপরীত প্রতিজ্ঞা।

২। এই দুইটি উপপাদ্যের প্রমাণের প্রণালী লক্ষ্য করিলে দেখা যায় যে পঞ্চম উপপাদ্যে কল্পনাটিকে ভিত্তি করিয়া সহজ যুক্তি দ্বারা সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া গিয়াছে, এবং ষষ্ঠ উপপাদ্যে সিদ্ধান্তকে সত্য বলিয়া স্বীকার না করায় এমন একটি ভ্রান্ত বিষয়ে উপনীত হইতে হইয়াছে যে তাহা উপপাদ্যটির কল্পনাকে অযৌক্তিক প্রতিপন্ন করিয়াছে।

প্রথম প্রণালীর প্রমাণকে **অন্বয়ী প্রমাণ** (Direct proof) এবং দ্বিতীয় প্রণালীর প্রমাণকে **ব্যতীরেকী প্রমাণ** (Indirect proof or *reductio ad absurdum*) বলে।

অনুশীলন ৯

১। একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের BC ভূমিস্থ কোণ দুইটির সমদ্বিখণ্ডক সরলরেখা E বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর $\triangle EBC$ সমদ্বিবাহু।

২। কোন ত্রিভুজের ভূমি উভয় দিকে বর্ধিত করিলে যে দুইটি বহিঃস্থ কোণ উৎপন্ন হয় তাহারা পরস্পর সমান হইলে ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ হইবে।

[If the exterior angles formed by producing one side of a triangle are equal, then the triangle is isosceles.] (কঃ প্রঃ ১৯২৪)

৩। প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের দুইটি কোণ অসমান হইলে, ইহাদের বিপরীত বাহু দুইটিও অসমান হইবে।

৪। PQRS একটি চতুর্ভুজ ; ইহার $\angle Q = \angle R$ এবং $PQ = RS$। যদি O বিন্দুতে PR ও QS মিলিত হয়, প্রমাণ কর যে $\triangle QOR$ ও $\triangle POS$ সমদ্বিবাহু।

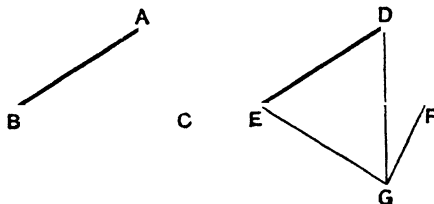
৫। ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান বাহুদ্বয় AB ও AC বর্ধিত করিয়া সমান অংশ BD ও CE কাটিয়া লওয়া হইল। $\angle CBD$ ও $\angle BCE$ এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় O বিন্দুতে মিলিত হইল। প্রমাণ কর $OD = OE$।

৬। ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ এবং P ইহার অন্তরস্থ একটি বিন্দু। PCর উপর আর একটি সমবাহু ত্রিভুজ PQC অঙ্কিত হইল, যেন PQ, AC বাহুকেই ছেদ করে। প্রমাণ কর, $\triangle PQC \equiv \triangle BPC$।

$\triangle AQC \equiv \triangle BPC$

উপপাদ্য ৭ (Theorem 7)

একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহু অপর একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহুর সহিত যথাক্রমে সমান হইলে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হইবে।

[If two triangles have three sides of the one respectively equal to three sides of the other, the triangles are congruent. *Euc*. 1. 8.]

চিত্র ৫০

ABC এবং DEF এই দুই ত্রিভুজের

AB = DE

BC = EF

এবং CA = FD।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম।

প্রমাণ। ABC ত্রিভুজকে DEF ত্রিভুজের উপর এরূপ ভাবে স্থাপন কর যেন B বিন্দু E বিন্দুর উপর, এবং BC বাহু EF বাহুর উপর পড়ে; এবং A বিন্দুটি, EF বাহুর যে পার্শ্বে D বিন্দু আছে তাহার বিপরীত পার্শ্বে পড়ে।

$\because$ BC = EF,

$\therefore$ C বিন্দু F বিন্দুর উপর পড়িবে।

মনে কর, EGF ত্রিভুজ BAC ত্রিভুজের নূতন অবস্থান;

DG যোগ কর।

$\therefore$ ED = AB = EG,

$\therefore$ $\angle$EDG = $\angle$EGD; (উপ. ৫)

আবার, $\because$ DF = AC = FG

$\therefore$ $\angle$FDG = $\angle$FGD; (উপ. ৫)

$\therefore$ সমগ্র $\angle$EDF = সমগ্র $\angle$EGF = $\angle$BAC।

এইবার, ABC ও DEF এই ত্রিভুজ দুইটির

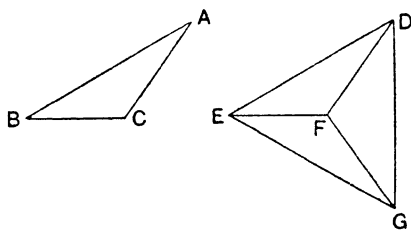
$$AB = DE$$

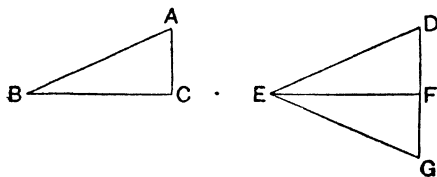
$$AC = DF$$

এবং অন্তর্ভূর্ত $\angle BAC$ = অন্তর্ভূর্ত $\angle EDF$ (প্রমাণিত);

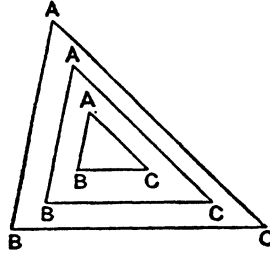
∴ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম। (উপ. ৪)

দ্রষ্টব্য ১। ত্রিভুজ দুইটির $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ হইবে এবং ক্ষেত্রফলও সমান হইবে। এখানেও সমান সমান বাহুগুলির বিপরীত কোণগুলি সমান।

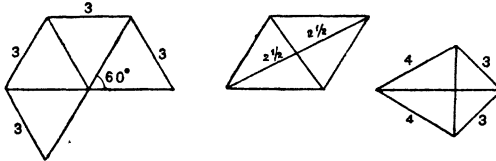
দ্রষ্টব্য ২। মনে কর, উক্ত ত্রিভুজ দুইটির C ও F স্থূলকোণ; উপরিপাতনে DG রেখা EF এর বাহিরে পঁড়িবে। (চিত্র ৫১)

চিত্র ৫১

আবার $\angle C$ ও $\angle E$ সমকোণ হইলে DG রেখা DF এর সহিত মিলিয়া যাইবে। (চিত্র ৫২)

চিত্র ৫২

এই দুই প্রকার ত্রিভুজের জন্য ভিন্ন ভিন্ন চিত্র আঁকিয়া উক্ত উপপাদ্যটি প্রমাণ করিতে হয়। সুতরাং যাহাতে মূল প্রমাণ সকল প্রকার ত্রিভুজেই খাটে, সেজন্য ত্রিভুজদ্বয় ইহাদের বৃহত্তম বাহু বরাবর স্থাপিত করিতে হইবে। ইহাতে ভিন্ন প্রকার চিত্রের প্রয়োজন হইবে না।

দ্রষ্টব্য ৩। দুইটি ত্রিভুজের একটির তিনটি কোণ যথাক্রমে অপরটির তিনটি কোণের সহিত পরস্পর সমান হইলে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম নাও হইতে পারে। ৫৩ চিত্র দেখিলেই ইহা বুঝিতে পারা যায়।

চিত্র ৫৩

অনুশীলনী ১০

১। নিম্ন চিত্রগুলির প্রত্যেকটিতে যে যে ত্রিভুজ সর্বসম তাহাদের নির্দেশ কর। ত্রিভুজগুলির বাহুর দৈর্ঘ্য ও কোণের পরিমাণ দেওয়া আছে।

চিত্র ৫৪

২। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু ও ভূমির মধ্যবিন্দু সংযোজক সরলরেখা ভূমির উপর লম্ব হইবে এবং শীর্ষকোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে।

৩। একটি সমবাহু ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের মধ্যবিন্দু পর্যায়ক্রমে যোগ করিলে যে ত্রিভুজ চতুষ্টয় উৎপন্ন হয় তাহারা প্রত্যেকেই সমবাহু।

৪। কোন চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলি সমান হইলে বিপরীত কোণগুলিও সমান হইবে।

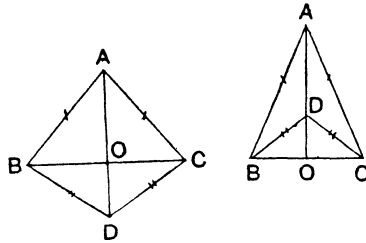
৫। রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পর দ্বিখণ্ডিত ও একটি অপরটির উপর লম্ব।

[The diagonals of a rhombus bisect each other at right angles.]

(কঃ প্রঃ ১৯৩৫)

(সংজ্ঞা। রম্বস একটি চতুর্ভুজ; ইহার বাহুগুলি সমান, কিন্তু কোণগুলি সমকোণ নয়)

৬। একই ভূমির উপর অবস্থিত দুইটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখা (১) শীর্ষকোণদ্বয়কে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে, (২) ভূমিকে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে, এবং (৩) ভূমির উপর লম্ব হইবে।

[The straight line which joins the vertices of two isosceles triangles standing on the same base (1) bisects the vertical angles (2) bisects the base and (3) is perpendicular to the base.]

চিত্র ৫৫

ABC ও DBC দুইটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ একই ভূমি BCর উপর অবস্থিত। AD যোগ কর।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

(1) AD, ∠BAC ও ∠BDC কে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে

(2) BO = CO

এবং (3) AO, BCর উপর লম্ব হইবে।

প্রমাণ। ABD ও ACD এই দুইটি ত্রিভুজের AB = AC ; DB = DC এবং AD সাধারণ বাহু ; ∴ ΔABD ≡ ΔACD। (উপ. ৭) ∴ ∠BAD = ∠CAD ও ∠BDA = ∠CDA। (1)

আবার, AOB ও AOC এই দুইটি ত্রিভুজের AB = AC ; AO সাধারণ বাহু এবং অন্তর্ভূ´ত ∠BAO = অন্তর্ভু´ত ∠CAO (প্রমাণিত) ; ∴ ΔAOB ≡ ΔAOC। ∴ O = CO। (2)

পুনশ্চ, ∵ ∠AOB = ∠AOC এবং ইহারা সন্নিহিত কোণ, ∴ AO ⊥ BC। (3)

মন্তব্য। এই অনুশীলনী (rider) হইতে কতকগুলি প্রাথমিক সম্পাদ্য সমাধানের ইঙ্গিত পাওয়া যায়। (৪১ অনুচ্ছেদ দ্রষ্টব্য)

৭। কোন বৃত্তের কেন্দ্র ও একটি জ্যা এর মধ্যবিন্দু-সংযোজক সরলরেখা জ্যা এর উপর লম্ব হইবে। (৩০ উপপাদ্যের চিত্র দ্রষ্টব্য)

৮। কোন বৃত্তের সমদীর্ঘ জ্যাগুলির সংমুখস্থ কেন্দ্রস্থিত কোণগুলি পরস্পর সমান হইবে।

৯। ABC ও DEF দুইটি ত্রিভুজ এমন যে AB = DE, AC = DF এবং ∠B = ∠E ; প্রমাণ কর যে, ∠C ও ∠F সমান অথবা সম্পূরক হইবে।

১০। কোন সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমির প্রান্তবিন্দুদ্বয় ও বাহু দুইটির মধ্যবিন্দুদ্বয় সংযোজক সরলরেখা দুইটি সমান হইবে।

১১। যদি দুইটি সমকোণী ত্রিভুজের একটির একটি বাহু ও অতিভুজ যথাক্রমে অপরটির একটি বাহু ও অতিভুজের সহিত সমান হয়, তবে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হইবে।

১২। সমবাহু ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় পরস্পর সমান।

১৩। সমকোণী সুষম চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় পরস্পর সমান।

১৪। যদি AB, CD সরলরেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব দ্বিখণ্ডক হইয়া ছেদ করে তবে ACBD ক্ষেত্রটি একটি রম্বস হইবে।

১৫। ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের AB, AC সমান বাহুদ্বয়ের উপর যথাক্রমে X, Y বিন্দুদ্বয় লওয়া গেল যাহাতে AX=AY হয়। দেখাও যে CX, BY পরস্পর সমান, এবং উভয়ে CBর উপর সমান কোণে নত।

১৬। ABCD, XYZW দুইটি চতুর্ভুজের AB=XY, BC=YZ, CD=ZW, $\angle B=\angle Y$, $\angle C=\angle Z$। প্রমাণ কর যে তাহারা সর্বসম।

১৭। দুইটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষকোণ সমান; উহারা এরূপভাবে অবস্থিত যে শীর্ষদ্বয় সমাপতিত (coincident)। প্রমাণ কর যে উহাদের অপর কৌণিক বিন্দুদ্বয় পরস্পর সংযুক্ত করিয়া যে রেখাগুলি হইবে তাহাদের মধ্যে দুইটি পরস্পর সমান।

১৮। ABCD চতুষ্কোণের AB, AD বাহুদ্বয় সমান, এবং AC কর্ণটি ABD কোণের দ্বিখণ্ডক; প্রমাণ কর (ক) CB=CD, এবং (খ) AC কর্ণ BCD কোণেরও দ্বিখণ্ডক।

১৯। ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ; ইহার AB, AC বাহুদ্বয়ের উপর যথাক্রমে BAD, CAE নামক অপর দুইটি সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত করা হইল। প্রমাণ কর যে DA, AE একই রেখা।

২০। BC, CA, AB একটি সমবাহু ত্রিভুজের বাহু; BCD CAE, ABF, তিনটি সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত হইল। প্রমাণ কর যে D, E, F কোণ সমবাহু ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষ।

২১। ABCDE একটি সুষম পঞ্চভুজ; প্রমাণ কর AD=AC।

২২। ABCDEF একটি সুষম ষড়ভুজ; প্রমাণ কর AC=DF।

২৩। ABC সমবাহু ত্রিভুজের AB, BC, CA বাহুত্রয়ের উপর AP, BQ, CR সমান দৈর্ঘ্য মাপা হইল। প্রমাণ কর PQR একটি সমবাহু ত্রিভুজ।

২৪। ABCD রম্বসের মধ্যক্ষেত্রে O বিন্দু এরূপভাবে লওয়া হইল যাহাতে ইহার দূরত্ব A, C শীর্ষদ্বয় হইতে সমান। দেখাও যে OB, OD একই সরলরেখায় অবস্থিত।

২৫। ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ; D, E বিন্দুদ্বয় যথাক্রমে AB, AC বাহুদ্বয়ের উপর এরূপভাবে লওয়া হইয়াছে যে AD=AE। যদি BE, CD F বিন্দুতে ছেদ করে তবে

(ক) BFC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ;

(খ) AF, BAC কোণের দ্বিখণ্ডক; এবং

(গ) AF কে বর্ধিত করিলে ইহা BCর লম্বদ্বিখণ্ডক হইবে।

চতুর্থ অধ্যায়

ব্যবহারিক জ্যামিতি

৩৮। ব্যবহারিক জ্যামিতিতে রুলার, স্কেল, ডিভাইডার, কম্পাস, চাঁদা ত্রিকোণী প্রভৃতি নানাবিধ যন্ত্রের ব্যবহার হয়। বিশুদ্ধ জ্যামিতিক অঙ্কনে মাত্র রুলার ও কম্পাস্ এই দুইটি যন্ত্র ব্যবহৃত হয়, তাহা ২৭ অনুচ্ছেদে বলা হইয়াছে এবং ইহাদের সাহায্যে কিরূপ অঙ্কন করা হয় তাহাও বিবৃত হইয়াছে। এখানে সেই গুলির পুনরুল্লেখ করা হইল।

রুলার দ্বারা

(ক) যে কোন একটি সরলরেখা টানা যাইতে পারে।

(খ) যে কোন সরলরেখাকে উভয় দিকে যথেচ্ছ বর্ধিত করা যাইতে পারে।

(গ) একটি বিন্দুর ভিতর দিয়া সরলরেখা টানা যাইতে পারে।

(ঘ) দুইটি বিন্দুর অবস্থান নির্দিষ্ট থাকিলে তাহাদিগকে সরলরেখা দ্বারা যোগ করা যাইতে পারে।

কম্পাস্ দ্বারা

(ক) যে কোন বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এবং যে কোন ব্যাসার্ধ লইয়া বৃত্ত অঙ্কিত করা যাইতে পারে।

(খ) কোন সীমাবদ্ধ সরলরেখার সহিত সমান করিয়া আর একটি সরলরেখার একটি অংশ নির্দেশ করা যাইতে পারে।

৩৯। জ্যামিতির সম্পাদ্যগুলি আলোচনা করিলে দেখা যায় যে বিশেষ বিশেষ বিন্দু, সরলরেখা, ও বৃত্তের নির্দেশ দ্বারাই সম্পাদ্যগুলির সমাধান হয়। কি কি বিশেষ অবস্থায় জ্যামিতির এই বস্তুগুলির অবস্থান নির্দেশ করা যাইতে পারে তাহা উল্লিখিত হইল :—

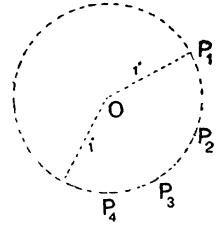
(ক) দুইটি বিন্দুর অবস্থান নির্দিষ্ট থাকিলে তাহাদের সংযোজক সরলরেখার অবস্থান নির্দিষ্ট হয়।

(খ) দুইটি নির্দিষ্ট সরলরেখার, দুইটি নির্দিষ্ট বৃত্তের, অথবা একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা ও একটি নির্দিষ্ট বৃত্তের ছেদনে যে বিন্দুর উৎপত্তি হয় তাহার অবস্থান নির্দিষ্ট হয়।

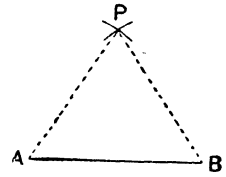
(গ) কোন নির্দিষ্ট বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এবং নির্দিষ্ট পরিমাণ ব্যাসার্ধ লইয়া যে বৃত্তটি অঙ্কিত করা যায় তাহার অবস্থান নির্দিষ্ট হয়।

৪০। এক্ষণে যে যে বিশেষ স্থলে বৃত্তাঙ্কন আবশ্যক তাহার কয়েকটি আলোচনা করা যাইতেছে।

প্রথম অঙ্কন। মনে কর, O একটি বিন্দু; এমন কতকগুলি বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় করিতে হইবে যাহারা O হইতে 1″ দূরে অবস্থিত হইবে।

O বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া 1″ ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। এই বৃত্তস্থিত P_1, P_2, P_3, P_4 প্রভৃতি বিন্দুগুলি O হইতে 1″ দূরে অবস্থিত। স্থতরাং,

চিত্র ৫৬

কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে নির্দিষ্ট পরিমাণ দূরে অবস্থিত কোন বিন্দুর অবস্থান নির্দেশ করিতে হইলে ঐ নির্দিষ্ট বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এবং ঐ দূরত্বের পরিমাণকে ব্যাসার্ধ লইয়া বৃত্ত অঙ্কন করিতে হইবে। এই বৃত্তই নির্ণেয় বিন্দুগুলির অবস্থান নির্দেশ করিবে।

দ্বিতীয় অঙ্কন। মনে কর, এক ইঞ্চি ব্যবধানে অবস্থিত দুইটি বিন্দু A ও B; এমন একটি বিন্দুর অবস্থান নির্দেশ করিতে হইবে, যাহা A হইতে 1 ইঞ্চি ও B হইতে 1 ইঞ্চি দূরে অবস্থিত হইবে।

চিত্র ৫৭

A বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া 1″ ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্তটি A হইতে 1″ দূরে অবস্থিত বিন্দুগুলির অবস্থান নির্দেশ করে;

B বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া 1″ ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্ত B হইতে 1″ দূরে অবস্থিত বিন্দুগুলির অবস্থান নির্দেশ করে।

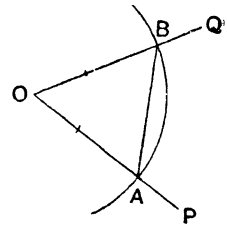
যদি এই দুইটি বৃত্ত P বিন্দুতে ছেদ করে, তবে স্পষ্ট বুঝা যায় যে P বিন্দু A ও B হইতে 1″ দূরে অবস্থিত।

PA ও PB যোগ করিলে PAB ত্রিভুজটি একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ হইবে। সুতরাং,

কোন দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে সমান দূরে অবস্থিত কোন বিন্দুর অবস্থান, অথবা, ঐ দুইটি বিন্দুর সংযোজক সরলরেখা যাহার ভূমি এমন একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত করিয়া তাহার শীর্ষবিন্দুর অবস্থান নির্দেশ করিতে হইলে, নির্দিষ্ট দুইটি বিন্দুকে পরপর কেন্দ্র করিয়া সমান সমান ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি বৃত্ত অঙ্কিত করা আবশ্যক।

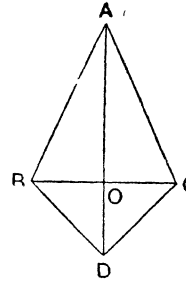
তৃতীয় অঙ্কন। মনে কর, POQ একটি কোণ অঙ্কিত আছে; এই কোণটিকে শীর্ষকোণ করিয়া যে কোন একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

চিত্র ৫৮

এখানে বিবেচনা করিতে হইবে যে, নির্ণেয় সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু O নির্দিষ্ট আছে; ভূমিসংলগ্ন দুইটি কৌণিক বিন্দুর অবস্থান নির্দেশ করা প্রয়োজন। এই দুইটি বিন্দু O হইতে সমান দূরে অবস্থিত। অতএব O কে কেন্দ্র করিয়া যে কোন ব্যাসার্ধ লইয়া বৃত্ত অঙ্কিত করিলে ইহা OP ও OQ কে যে বিন্দু দুইটিতে ছেদ করিবে তাহাই ভূমিস্থ কৌণিক বিন্দু হইবে। মনে কর, A ও B সেই দুইটি বিন্দু। AB যোগ করিলেই AOB ত্রিভুজটি একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ হইবে।

৪১। **সম্পাদ্যের সমাধান প্রণালী**—ইতঃপূর্বে বলা হইয়াছে যে, সম্পাদ্যের সমাধানে বিশেষ বিশেষ সরলরেখা ও বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় আবশ্যক; আরও বলা হইয়াছে যে, উপপাদ্য হইতেই বিশেষ বিশেষ সম্পাদ্যের সমাধানের সঙ্কেত পাওয়া যায়। এই অধ্যায়ের শেষভাগে কোন নির্দিষ্ট কোণের সমদ্বিখণ্ডন, সীমাবদ্ধ সরলরেখার সমদ্বিখণ্ডন, প্রভৃতি কয়েকটি প্রাথমিক অঙ্কন প্রণালী বর্ণিত হইবে। কোন্ সম্পাদ্য হইতে এই সকল অঙ্কনের সমাধানের কিরূপ সঙ্কেত পাওয়া যায় তাহার আলোচনা করা যাইতেছে।

অনুশীলনী ১০এর অন্তর্গত ৬ প্রশ্নে উল্লিখিত আছে যে—একই ভূমির উপর অবস্থিত তুইটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখা (১) শীর্ষকোণদ্বয়কে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে, (২) ভূমিকে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে, এবং (৩) ভূমির উপর লম্ব হইবে।

৫৯ চিত্রে, ABC ও DBC তুইটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ। (১) AD রেখা ∠BAC ও ∠BDCকে সমদ্বিখণ্ডিত করে; (২) AD রেখা BCকে সমদ্বিখণ্ডিত করে; এবং (৩) AO, BCর উপর লম্ব।

চিত্র ৫৯

(ক) এখন, মনে কর, BAC কোণটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে। AD সরলরেখার অবস্থান নির্ণয় করিতে পারিলেই কোণটি ইহার দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হইবে। ইহার একটি বিন্দু A নির্দিষ্ট আছে, অপর একটি বিন্দু Dর অবস্থান চাই। এজন্য এই অঙ্কনগুলি আবশ্যক :—

(১) সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ ABC ; (৪০ অনুচ্ছেদ, ৩ অঙ্কন)

(২) সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ BDC, অথবা B ও C হইতে সমান দূরে D বিন্দুর নির্দেশ ; (৪০ অনুচ্ছেদ, ২ অঙ্কন)

(৩) A ও Dর সংযোগ। (৩৯ ক)

(খ) BC একটি সীমাবদ্ধ সরলরেখা ; ইহাকে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে উপপাদ্যে প্রমাণিত হইয়াছে AD, BCকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। এখানে মাত্র B ও C বিন্দুর অবস্থান নির্দিষ্ট আছে, অপর কোন বিন্দু নির্দিষ্ট নাই; কিন্তু AD সরলরেখাটির অবস্থান চাই, সেজন্য A ও D বিন্দুর অবস্থান জানা আবশ্যক অতএব নিম্ন অঙ্কনগুলি আবশ্যক :—

(১) BAC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কন ; (৪০ অনুচ্ছেদ, ২ অঙ্কন)

(২) BDC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কন ; (৪০ অনুচ্ছেদ, ২ অঙ্কন)

(৩) A ও Dর সংযোজন। (৩৯ ক)

(গ) মনে কর, A হইতে BCর উপর লম্ব টানিতে হইবে। এখানে মাত্র A বিন্দুর অবস্থান দেওয়া আছে। অতএব নিম্ন অঙ্কনগুলি আবশ্যক :—

(১) A হইতে সমান দূরে BC রেখায় অবস্থিত B ও C বিন্দুর নির্দেশ, (৪০ অনুচ্ছেদ, ৩ অঙ্কন)

(২) B ও C হইতে সমান দূরে D বিন্দুর নির্দেশ, (৪০ অনুচ্ছেদ, ২ অঙ্কন)

(৩) A ও Dর সংযোজন। (৩৯ক)

(ঘ) মনে কর, BC সরলরেখাস্থ O বিন্দু হইতে ইহার উপর লম্ব টানিতে হইবে। এখানে AD রেখাটি চাই। এজন্য নিম্ন অঙ্কনগুলি আবশ্যক :—

(১) O হইতে সমান দূরে B ও C বিন্দুর নির্দেশ, (৩৯খ)

(২) B ও C হইতে সমান দূরে A বিন্দুর নির্দেশ, (৪০ অনুঃ, ২ অঙ্কন)

(৩) A ও Oর সংযোজন। (৩৯ ক)

উক্ত চারিটি অঙ্কনকার্যে একই প্রকার অঙ্কন আবশ্যক এবং এই অঙ্কনের সঙ্কেত উপর্যুক্ত উপপাদ্য হইতে সূচিত হইতেছে স্পষ্ট বুঝা যায়। এই অঙ্কন প্রণালীও ইতঃপূর্বে বর্ণিত হইয়াছে।

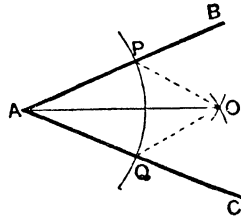
(শিক্ষক মহাশয় কোন উপপাদ্য পাঠনাকালে তাহা হইতে কি বিশেষ অঙ্কন করিতে পারা যায় ছাত্রদের তাহার ইঙ্গিত দিবেন)

২৪। এই প্রকারে সম্পাদ্য সমাধানের সঙ্কেত হইতে যে সমাধান প্রণালী পাওয়া যায় তাহাকে **বিশ্লেষণ প্রণালী** (Analysis) বলে। উপপাদ্যগুলিকেও বিশ্লেষণ প্রণালীতে সমাধান করিতে হয়। যুক্তিদ্বারা সম্পাদ্যের সমাধানকে প্রতিষ্ঠিত করিতে হয়, এবং সমাধানের পর চাঁদা প্রভৃতির ব্যবহার দ্বারা নিশ্চয়তা পরীক্ষা করিতে হয়। সম্পাদ্যের চিত্রগুলির পরিচ্ছন্নতার দিকে বিশেষ লক্ষ্য রাখা কর্তব্য।

এক্ষণে কয়েকটি প্রাথমিক সম্পাদ্যের সমাধান প্রণালী বর্ণিত হইবে।

সম্পাদ্য ১ (Problem 1)

একটি নির্দিষ্ট কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

[To bisect a given angle. *Euc.* 1. 9.]

চিত্র ৬০

BAC একটি নির্দিষ্ট কোণ ; ইহাকে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। A বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া যে কোন ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ অঙ্কিত কর। মনে কর, এই বৃত্তচাপ AB ও AC কে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে।

অতঃপর, P ও Q কে কেন্দ্র করিয়া PQ ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি চাপ অঙ্কিত কর ; মনে কর, ইহারা O বিন্দুতে ছেদ করে।

AO যোগ কর।

AO রেখা BAC কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে।

প্রমাণ। PO এবং QO যোগ কর।

APO এবং AQO এই ত্রিভুজদ্বয়ের

AP = AQ (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ)

PO = QO (সমান বৃত্তের ব্যাসার্ধ)

এবং AO সাধারণ বাহু।

$\therefore$ $\triangle$APO এবং $\triangle$AQO সর্বসম। (উপ. ৭)

সুতরাং, $\angle$PAO = $\angle$QAO ;

অর্থাৎ AO, $\angle$BAC কে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে।

অনুশীলনী ১১

১। কোন যন্ত্রের ব্যবহার না করিয়া 360° পর্যন্ত নানারূপ কোণ অঙ্কন কর এবং উহাদিগকে সমদ্বিখণ্ডিত কর। অতঃপর যন্ত্রের সাহায্যে অঙ্কন করিয়া যাথার্থ্য প্রতিপাদন কর।

২। একটি সরলকোণকে সমদ্বিখণ্ডিত কর, এবং প্রমাণ কর যে, সরলকোণের দ্বিখণ্ডক রেখা সমসূত্রে অবস্থিত বাহুদ্বয়ের উপর লম্ব হইবে।

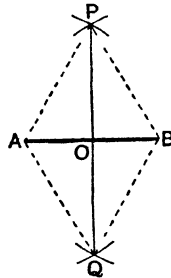
ইহা হইতে কোন সরলরেখার কোন বিন্দু হইতে ইহার উপর লম্ব আঁকিবার উপায় উদ্ভাবন কর।

৩। একটি কোণ অঙ্কিত করিয়া ইহাকে চারি সমান অংশে বিভক্ত কর।

৪। একটি ত্রিভুজের তিনটি কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত কর। সমদ্বিখণ্ডক রেখাগুলি সমবিন্দু (concurrent) হইবে।

সম্পাদ্য ২ (Problem 2)

একটি সীমাবদ্ধ সরলরেখাকে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

[To bisect a straight line of given length. *Euc.* 1. 10.]

চিত্র ৬১

AB একটি সীমাবদ্ধ সরলরেখা, ইহাকে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। A বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া AB ব্যাসার্ধ লইয়া ABর উভয় পার্শ্বে দুইটি বৃত্তচাপ অঙ্কিত কর। B বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এবং AB ব্যাসার্ধ লইয়া ABর উভয় পার্শ্বে দুইটি বৃত্তচাপ অঙ্কিত কর। মনে কর, এই চাপগুলি P ও Q বিন্দুতে ছেদ করিল। PQ যোগ কর।

PQ, AB রেখাকে O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে।

প্রমাণ। PA, PB, QA, QB যোগ কর।

APQ ও BPQ এই দুইটি ত্রিভুজের

AP = BP } (সমান বৃত্তের ব্যাসার্ধ)
AQ = BQ }

এবং PQ উভয়ের সাধারণ বাহু।

∴ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম ; (উপ. ৭)

∴ ∠APQ = ∠BPQ।

আবার, APO ও BPO ত্রিভুজদ্বয়ের

AP = BP

PO সাধারণ বাহু

এবং অন্তর্ভুত ∠APO = অন্তর্ভুত ∠BPO ; (প্রমাণিত)

∴ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম। (উপ. ৪)

অতএব, AO = BO ;

অর্থাৎ, AB রেখা O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত।

মন্তব্য। PQ রেখা ABর উপর লম্ব এবং ইহার সমদ্বিখণ্ডক। এই প্রকার রেখাকে **লম্ব দ্বিখণ্ডক** (Right bisector, or, Perpendicular bisector) বলে।

অনুশীলনী ১২

১। একটি 3″ দীর্ঘ সরলরেখা লও এবং ইহাকে বিনাযন্ত্রে সমান দুইভাগে বিভক্ত করিয়া ডিভাইডার দ্বারা পরীক্ষা কর।

২। AB একটি সীমাবদ্ধ সরলরেখা ; ইহার এক পার্শ্ব অগম্য (inaccessible) ; কি প্রকারে ইহাকে সমান দুই ভাগে বিভক্ত করা যাইতে পারে ?

৩। একটি সীমাবদ্ধ সরলরেখাকে সমান চারি অংশে ভাগ কর।

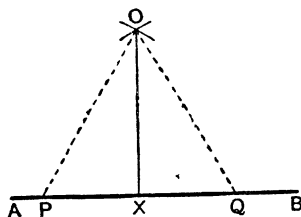
৪। একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহুর লম্বদ্বিখণ্ডক রেখাগুলি অঙ্কিত কর। রেখাগুলি একবিন্দুতে মিলিত হইবে। এই বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এবং ইহা হইতে ত্রিভুজের একটি শীর্ষবিন্দুর যাহা দূরত্ব তাহা ব্যাসার্ধ লইয়া যে বৃত্ত অঙ্কিত হইবে তাহা ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দু দিয়া যাইবে।

৫। ABC একটি ত্রিভুজ, AB = 4″, BC = 3″, ও CA = 2″. AB ও BCর মধ্যবিন্দু X ও Y নির্ণয় কর ; দেখাও XY = 1″ হইবে।

৬। ABC একটি ত্রিভুজ। ইহার তিনটি মধ্যমা অঙ্কিত কর। ইহারা একবিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিবে।

সম্পাদ্য ৩ (Problem 3)

একটি সরলরেখাস্থিত কোন বিন্দু হইতে ইহার উপর লম্ব অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To draw a perpendicular to a given straight line at a given point in it. *Euc.* 1. 11.]

চিত্র ৬২

AB একটি সরলরেখা এবং X ইহার একটি বিন্দু ; X বিন্দুতে AB রেখার উপর লম্ব টানিতে হইবে।

অঙ্কন। X বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া দুইটি বৃত্তচাপ আঁকিয়া AB সরলরেখা হইতে XP ও XQ এই দুই সমান অংশ কাটিয়া লও।

P ও Q কে কেন্দ্র করিয়া, PQ ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি চাপ অঙ্কিত কর ; ধর, এই দুইটি চাপ O বিন্দুতে ছেদ করিল।

OX যোগ কর।

OX, ABর উপর X বিন্দুতে লম্ব হইবে।

প্রমাণ। OP ও OQ যোগ কর।

OXP এবং OXQ এই দুই ত্রিভুজের

XP = XQ (অঙ্কন)

OX সাধারণ বাহু

এবং OP = OQ ; (সমবৃত্তের ব্যাসার্ধ)

∴ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম। (উপ. ৭)

∴ $\angle OXP = \angle OXQ$;

এবং ইহারা সন্নিহিত কোণ হওয়ায়

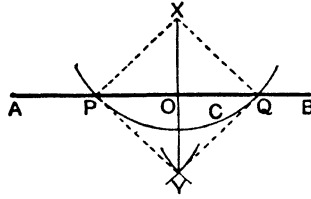
$\angle OXP = \angle OXQ$ = একটি সমকোণ। (উপ. ১)

অতএব, OX, ABর উপর লম্ব।

মন্তব্য। X বিন্দুটি যদি সরলরেখা ABর এক প্রান্তে থাকে, তবে উহাকে যথেচ্ছ বর্ধিত করিয়া এই প্রণালী অবলম্বন করা যাইতে পারে। ইহার অন্য প্রণালী যথাস্থানে বর্ণিত হইবে।

সম্পাদ্য 8 (Problem 4)

কোন সরলরেখার বহিঃস্থ কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে ঐ সরলরেখার উপর লম্ব অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To draw a perpendicular to a given straight line from a point outside it. *Euc.* 1. 12.]

চিত্র ৬৩

AB রেখার বহিঃস্থ X একটি বিন্দু।

X বিন্দু হইতে AB রেখার উপর লম্ব অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। AB সরলরেখার যে পার্শ্বে X বিন্দু অবস্থিত তাহার বিপরীত পার্শ্বে একটি বিন্দু C লও।

X কে কেন্দ্র করিয়া XC ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ অঙ্কিত কর ; ধর, এই চাপ AB সরলরেখাকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে।

P ও Q কে কেন্দ্র করিয়া যে কোন সমান ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি বৃত্তচাপ আঁক ; মনে কর, এই দুইটি চাপ Y বিন্দুতে ছেদ করে।

XY যোগ কর।

XY রেখা ABকে O বিন্দুতে ছেদ করিল।

XO, ABর উপর লম্ব হইবে।

প্রমাণ। PX, QX, PY ও QY যোগ কর।

PXY ও QXY ত্রিভুজদ্বয়ের

PX = QX (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ)

PY = QY (সমবৃত্তের ব্যাসার্ধ)

এবং, XY সাধারণ বাহু ;

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। (উপ. ৭)

∴ ∠PXY = ∠QXY ;

অর্থাৎ, ∠PXO = ∠QXO।

আবার, PXO ও QXO ত্রিভুজদ্বয়ের

PX = QX

XO সাধারণ বাহু

এবং, অন্তর্ভূ‌র্ত ∠PXO = অন্তর্ভূর্ত ∠QXO ; (প্রমাণিত)

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম ; (উপ. ৪)

∴ ∠POX = ∠QOX।

কিন্তু ইহারা সন্নিহিত কোণ ;

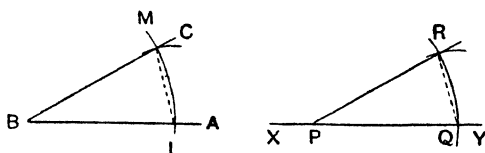
∴ ∠POX = ∠QOX = এক সমকোণ ; (উপ. ১)

∴ XO, ABর উপর লম্ব।

দ্রষ্টব্য। P ও Qকে কেন্দ্র করিয়া যে কোন ব্যাসার্ধ লইয়া যে বৃত্তের চাপ দুইটি Y বিন্দুতে ছেদ করিল তাহা কেবলমাত্র সম্ভব যখন ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য PQ এর অর্ধেকের বেশী, অর্ধেকের কম হইলে অঙ্কন অসম্ভব।

সম্পাদ্য ৫ (Problem 5)

কোন সরলরেখার একটি বিন্দুতে কোন নির্দিষ্ট কোণের সহিত সমান করিয়া একটি কোণ অঙ্কিত করিতে হইবে।

[At a given point in a given straight line to make an angle equal to given angle. *Euc.* 1. 23.]

চিত্র ৬৪

∠ABC একটি নিদিষ্ট কোণ এবং XY একটি সরলরেখা। XY রেখার P বিন্দুতে ∠ABCর সহিত সমান করিয়া একটি কোণ অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। B বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া যে কোন ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ অঙ্কিত কর; মনে কর, এই চাপ BA ও BC বাহুদ্বয়কে যথাক্রমে L ও M বিন্দুতে ছেদ করে।

P বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া BL এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত কর; মনে কর, এই চাপ XY রেখাকে Q বিন্দুতে ছেদ করে।

Q বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া LM এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ অঙ্কিত কর; মনে কর, এই চাপ পূর্ব চাপকে R বিন্দুতে ছেদ করে।

PR যোগ কর।

$\angle QPR$, $\angle ABC$র সহিত সমান হইবে।

প্রমাণ। LM ও QR যোগ কর।

QPR ও LBM ত্রিভুজদ্বয়ের

QP = LB ([illegible] অর)

PR = BM („)

RQ = ML („);

∴ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম। (উপ. ৭)

∴ $\angle QPR = \angle LBM = \angle ABC$।

অনুশীলনী ১৩

১। কোন নির্দিষ্ট স্থূলকোণের সহিত সমান করিয়া অপর একটি কোণ অঙ্কন কর, এবং যন্ত্র সাহায্যে যাথার্থ্য প্রতিপন্ন কর।

২। চাঁদার ব্যবহার না করিয়া নিম্ন কোণগুলি অঙ্কিত কর—

$90°$, $45°$, ও $135°$

৩। ABC একটি ত্রিভুজ। প্রতি শীর্ষবিন্দু হইতে বিপরীত বাহুর উপর লম্ব অঙ্কিত কর; এই তিনটি লম্ব একই বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিবে।

৪। একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে 3″ দূরে অবস্থিত একটি সরলরেখা টান।

৫। কোন সমকোণকে সমত্রিখণ্ডিত কর। [To trisect a right angle.]

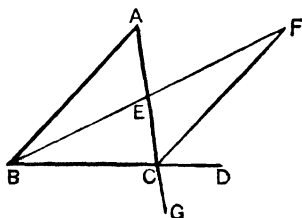
$\angle BAC$ একটি সমকোণ। Aকে কেন্দ্র করিয়া এবং যে কোন ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তের চাপ আঁক। ধর, AB, AC বাহু দুইটি যথাক্রমে E, D বিন্দুতে ছেদিত হইল। E, D কে কেন্দ্র করিয়া পূর্ব ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি বৃত্তের চাপ আঁক। ধর, ইহারা প্রথম চাপকে P,Q বিন্দুতে ছেদ করিল। AP,AQ প্রত্যেকেই $\angle BAC$র সমত্রিখণ্ডক।

পঞ্চম অধ্যায়

ত্রিভুজের বাহু ও কোণ

উপপাদ্য ৮ (Theorem 8)

ত্রিভুজের একটি বাহু বর্ধিত করিলে যে বহিঃস্থ কোণটি উৎপন্ন হয়, তাহা বিপরীত অন্তঃকোণ দুইটির প্রত্যেকটি অপেক্ষা বৃহত্তর।

[If one side of a triangle be produced, then the exterior angle so formed is greater than either of the interior opposite angles. *Euc.* 1. 16.]

চিত্র ৬৫

ABC একটি ত্রিভুজ ; ইহার BC বাহু D পর্য্যন্ত বর্ধিত হইল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

বহিঃকোণ ACD বিপরীত অন্তঃকোণ BAC অথবা ABC হইতে বৃহত্তর।

অঙ্কন। মনে কর, E, ACর মধ্যবিন্দু। BE যোগ কর ; এবং ইহাকে F বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত কর যেন BE=EF হয়।

CF যোগ কর।

প্রমাণ। AEB ও CEF ত্রিভুজদ্বয়ের

AE=CE (অঙ্কন)

BE=FE (অঙ্কন)

এবং অন্তর্ভূ্ত $\angle AEB =$ অন্তর্ভূ্ত $\angle CEF$ (বিপ্রতীপ);

$\therefore$ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম। (উপ. ৪)

$\therefore$ $\angle ECF = \angle EAB$।

কিন্তু $\angle ECD > ECF$,

$\therefore$ $\angle ECD > \angle EAB$;

অর্থাৎ $\angle ACD > \angle BAC$।

এই প্রণালীতে AC কে G পর্যন্ত বর্ধিত করিয়া এবং Aর সহিত BCর মধ্যবিন্দু যোগ করিয়া প্রমাণ করা যাইতে পারে যে,

$\angle BCG > \angle ABC$।

কিন্তু, $\angle ACD = \angle BCG$, (বিপ্রতীপ)

$\therefore$ $\angle ACD > \angle ABC$।

অনুসিদ্ধান্ত ১। ত্রিভুজের যে কোন দুই কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

[Any two angles of a triangle are together less than two right angles.]

$\because$ $\angle ABC < \angle ACD$ (চিত্র ৬৫ দেখ)

$\therefore$ $\angle ABC + \angle ACB < \angle ACD + \angle ACB$।

কিন্তু $\angle ACD + \angle ACB = 2$ সমকোণ; (উপ. ১)

$\therefore$ $\angle ABC + \angle ACB < 2$ সমকোণ।

অনুসিদ্ধান্ত ২। কোন ত্রিভুজের অন্ততঃ দুইটি কোণ সূক্ষ্মকোণ হইবে।

[A triangle has at least two of its angles acute.]

কোন ত্রিভুজের একটি কোণ স্থূল হইলে ইহার সম্পূরক কোণ সূক্ষ্মকোণ হইবে, এবং এই সূক্ষ্মকোণটি অপর দুইটি কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর। সুতরাং, ত্রিভুজের দুইটি কোণই সূক্ষ্মকোণ। ত্রিভুজের একটি কোণ সমকোণ হইলেও এইরূপ হইবে।

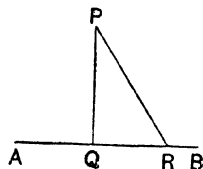
অনুসিদ্ধান্ত ৩। কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে কোন নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর একটি মাত্র লম্ব অঙ্কিত করা যাইতে পারে।

(Only one perpendicular can be drawn from a given point to a given straight line.)

যদি ABর উপর P হইতে PQ ও PR দুইটি লম্ব অঙ্কন করা সম্ভব হয়, তবে ∠PQA ও ∠PRQ এই দুইটি কোণের প্রত্যেকটি সমকোণ হইবে।

সুতরাং, ∠PQA = ∠PRQ।

কিন্তু, ∠PQA > ∠PRQ ;. (উপ. ৮)

অতএব দুইটি লম্ব অঙ্কন করা অসম্ভব।

চিত্র ৬৬

অনুশীলনী ১৪

১। কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে কোন সরলরেখার উপর তিনটি সমান সরলরেখা অঙ্কিত করা অসম্ভব। (কঃ প্রঃ ১৯৩২)

২। একটি সমবাহু ত্রিভুজের ভূমি উভয়দিকে বর্ধিত করিলে যে দুইটি বহিঃস্থ কোণ হয় তাহারা প্রত্যেকে স্থূলকোণ হইবে।

৩। ABC একটি ত্রিভুজ, O ইহার অভ্যন্তরস্থ যে কোন একটি বিন্দু। প্রমাণ কর ∠BOC > ∠BAC।

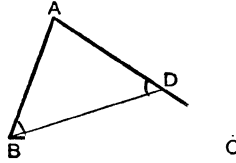
৪। কোন একটি ত্রিভুজের যে কোন বাহু উভয় দিকে বর্ধিত করিলে যে দুইটি বহিঃস্থ কোণ উৎপন্ন হয় তাহাদের সমষ্টি দুই সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে। [The sum of the exterior angles formed by producing one side of a triangle both ways is greater than two right angles]

৫। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমিসংলগ্ন কোণ দুইটি সূক্ষ্মকোণ হইবে। (The base angles of an isosceles triangle are acute)। (কঃ প্রঃ ১৯২৬)

৬। সমবাহু ত্রিভুজের প্রত্যেকটি কোণই সূক্ষ্মকোণ।

উপপাদ্য ৯ (Theorem 9)

কোন ত্রিভুজের একটি বাহু অপর একটি বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে বৃহত্তর বাহুর বিপরীত কোণ ক্ষুদ্রতর বাহুর বিপরীত কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

[If one side of a triangle is greater than another, then the angle opposite to the greater side is greater than the angle opposite to the less. *Euc*. 1. 18.]

চিত্র ৬৭

ABC একটি ত্রিভুজ ; ইহার AC বাহু > AB বাহু।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\angle ABC > \angle ACB$।

অঙ্কন। AC বাহু হইতে AB বাহুর সমান করিয়া AD অংশ কাটিয়া লও এবং BD যোগ কর।

প্রমাণ। $\because$ AB = AD,

$\therefore$ $\angle ABD = \angle ADB$। (উপ. ৫)

কিন্তু, $\angle ADB$, $\triangle BDC$র বহিঃস্থ কোণ,

$\therefore$ $\angle ADB > \angle DCB$; (উপ. ৮)

$\therefore$ $\angle ABD > \angle DCB$।

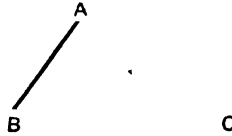
কিন্তু, $\angle ABC > \angle ABD$;

$\therefore$ $\angle ABC > \angle DCB$;

অর্থাৎ, $\angle ABC > \angle ACB$।

উপপাদ্য ১০ (Theorem 10)

কোন ত্রিভুজের একটি কোণ অপর একটি কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে বৃহত্তর কোণটির বিপরীত বাহু ক্ষুদ্রতর কোণটির বিপরীত বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

[If one angle of a triangle is greater than another, then the side opposite to the greater angle is greater than the side opposite to the less. *Euc.* 1. 19.]

চিত্র ৬৮

ABC একটি ত্রিভুজ ; ইহার $\angle ABC > \angle ACB$।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $AC > AB$।

প্রমাণ। যদি AC বাহু AB অপেক্ষা বৃহত্তর না হয়, তবে AC, ABর সমান কিংবা AB অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে।

যদি $AC = AB$ হয়,

তবে, $\angle ABC = \angle ACB$ হইবে ; (উপ. ৫)

কিন্তু স্বীকৃত হইয়াছে যে, ইহারা অসমান।

আবার, যদি $AC < AB$ হয়,

তবে, $\angle ABC < \angle ACB$ হইবে ; (উপ. ৯)

কিন্তু, স্বীকৃত হইয়াছে যে, $\angle ABC > \angle ACB$।

সুতরাং, AC বাহু ABর সমান হইতে পারে না,

কিংবা, AC বাহু AB হইতে ক্ষুদ্রতরও হইতে পারে না ;

অতএব $AC > AB$।

মন্তব্য ১। এই উপপাদ্যটি নবম উপপাদ্যের বিপরীত।

২। ত্রিভুজের দুইটি কোণ সমান হইলে বিপরীত বাহুদ্বয় সমান হইবে। কোণ দুইটি ছোট ও বড় হইলে তদ্বিপরীত বাহু দুইটিও যথাক্রমে ছোট ও বড় হইবে। কিন্তু, একটি কোণ অপরটির দ্বিগুণ, তিনগুণ হইলে তদ্বিপরীত বাহুদুইটির একটি অপরটির দ্বিগুণ, ত্রিগুণ দীর্ঘ নাও হইতে পারে।

অনুশীলনী ১৫

১। সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজই দীর্ঘতম বাহু। (কঃ প্রঃ ১৯৩৫)

(The hypotenuse is the longest side of a right angled triangle.)

২। একটি স্থূলকোণী ত্রিভুজের স্থূলকোণের বিপরীত বাহুই দীর্ঘতম।

৩। ABC একটি ত্রিভুজ। $\angle B$ ও $\angle C$ এর সমদ্বিখণ্ডক রেখাদ্বয় P বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। যদি $AB > AC$ হয়, তবে $PB > PC$ হইবে।

৪। ABC একটি ত্রিভুজ। A হইতে BCর উপর AD লম্ব। প্রমাণ কর $AB > BD$ এবং $AC > CD$। ইহা হইতে দেখাও যে, $AB + AC > BC$। (উপ. ১১)

৫। ABCD চতুর্ভুজের AD বাহুটি বৃহত্তম এবং BC বাহুটি ক্ষুদ্রতম। দেখাও $\angle C > \angle A$।

৬। ABC ত্রিভুজের $\angle BAC$র দ্বিখণ্ডক রেখা BC বাহুকে P বিন্দুতে ছেদ করে। যদি $AB > AC$ হয়, তবে $BP > CP$ হইবে।

৭। ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহুর অন্তরফল তৃতীয় বাহু অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

[The difference of any two sides of a triangle is less than the third.] (কঃ প্রঃ ১৯৩৪)

(উপপাদ্য ৯ এর চিত্র দেখ)

$AB = AD$, $\therefore$ $AC - AB = DC$;

বহিঃকোণ $BDC > \angle ABD$; $\angle ABD = \angle ADB$; এবং $\angle ADB > \angle DCB$।

$\therefore$ $\angle BDC > \angle DCB$; $\therefore$ $DC < BC$; অর্থাৎ, $AC - AB < BC$।

৮। ABC একটি ত্রিভুজ ; ইহার $AB > AC$। BD ও CD যথাক্রমে $\angle ABC$ ও $\angle ACB$র সমদ্বিখণ্ডক ; ইহারা যদি D বিন্দুতে ছেদ করে, তবে প্রমাণ কর $BD > CD$.

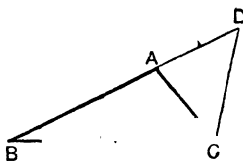
৯। কোন সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হইতে ভূমিস্থ একটি বিন্দুর দূরত্ব একটি বাহু হইতে ক্ষুদ্রতর হইবে এবং যদি বিন্দুটি ভূমির বর্ধিতাংশে থাকে তবে বৃহত্তর হইবে।

১০। ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ। D ইহার ভূমিস্থ একটি বিন্দু। যদি ADর মধ্যবিন্দু E হয়, প্রমাণ কর $AE < EB$ অথবা EC.

উপপাদ্য ১১ (Theorem 11)

ত্রিভুজের যে কোন দুইটি বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর।

[Any two sides of a triangle are together greater than the third. *Euc.* 1. 20.]

চিত্র ৬৯

ABC একটি ত্রিভুজ ; এবং মনে কর BC ইহার বৃহত্তম বাহু।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, AB+AC>BC।

অঙ্কন। BA বাহুকে D পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত কর যেন AD=AC হয়। DC যোগ কর।

প্রমাণ। ∵ AD=AC,

∴ ∠ADC=∠ACD। (উপ. ৫)

কিন্তু, ∠BCD>∠ACD,

∴ ∠BCD>∠ADC ;

অর্থাৎ, ∠BCD>∠BDC ,

অতএব, BD>BC। (উপ. ১০)

কিন্তু, BD=BA+AD=BA+AC ;

∴ BA+AC>BC।

টীকা। যদি ধরিয়া লওয়া যায় যে দুইটি বিন্দুর সংযোজক সরলরেখার দৈর্ঘ্যই ইহাদের ন্যূনতম দূরত্ব, তবে এই উপপাদ্যটি প্রমাণের প্রয়োজন হয় না।

অনুশীলনী ১৬

১। $2''$, $3''$ ও $5''$ দীর্ঘ সরলরেখা দ্বারা ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভব কি ?

২। কোন চতুর্ভুজের যে কোন তিনটি বাহুর সমষ্টি চতুর্থ বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর। (কঃ প্রঃ ১৯৩৩)

৩। প্রমাণ কর যে, কোন চতুর্ভুজের পরিসীমা ইহার কর্ণদ্বয়ের সমষ্টি অপেক্ষা বৃহত্তর। (কঃ প্রঃ ১৯২০)

৪। একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহুর পরিমাণ 2 ও 3 ; প্রমাণ কর যে, ইহার তৃতীয় বাহুটি 5 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর কিন্তু 1 হইতে বৃহত্তর। (কঃ প্রঃ ১৯২৫)

৫। প্রমাণ কর যে, কোন চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয়ের সমষ্টি ইহার অর্ধ-পরিসীমা অপেক্ষা বৃহত্তর।

৬। ABC একটি ত্রিভুজের অন্তঃস্থিত O একটি বিন্দু ; প্রমাণ কর যে,

(১) $OB+OC<AB+AC$

(২) $AB+BC+CA<OA+OB+OC$

(৩) $OA+OB+OC>\frac{1}{2}(AB+BC+CA)$

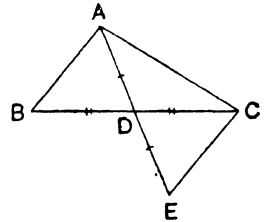
৭। একটি চতুর্ভুজের অন্তরস্থ যে কোন বিন্দু হইতে কৌণিক বিন্দুগুলির দূরত্বের সমষ্টি চতুর্ভুজের অর্ধ-পরিসীমা হইতে বৃহত্তর হইবে।

৮। প্রমাণ কর যে কোন ত্রিভুজের যে কোন দুইটি বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহুর উপর অঙ্কিত মধ্যমার দ্বিগুণ হইতেও বৃহত্তর।

[The sum of any two sides of a triangle is greater than twice the median which bisects the third side] (কঃ প্রঃ ১৯২৩)

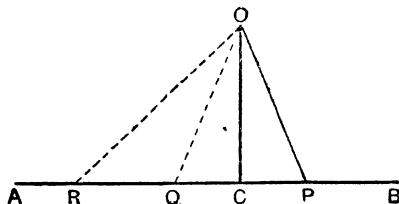
চিত্র ৭০

ABC একটি ত্রিভুজ এবং AD একটি মধ্যমা। প্রমাণ করিতে হইবে যে, $AB+AC>2AD$। AD কে E পর্যন্ত বর্ধিত কর, যেন $AD=DE$ হয়। CE যোগ কর। $\Delta ADB\equiv\Delta EDC$ (উপ. ৪) $\therefore AB=CE$।

কিন্তু, $AC+CE>AE$, $AC+BA<2AD$।

৯। কোন ত্রিভুজের পরিসীমা ইহার মধ্যমা-ত্রয়ের সমষ্টি হইতে বৃহত্তর। (The perimeter of a triangle is greater than the sum of its medians.)

উপপাদ্য ১২ (Theorem 12)

কোন বহিঃস্থ বিন্দু হইতে একটি সরলরেখা পর্যন্ত যত সরলরেখা টানা যায়, তন্মধ্যে লম্বই ক্ষুদ্রতম।

[Of all straight lines that can be drawn to a given straight line from a given point outside it, the perpendicular is the shortest.]

চিত্র ৭১

AB একটি সরলরেখা এবং O একটি বহিঃস্থ বিন্দু। O হইতে AB-র উপর লম্ব OC এবং আর একটি রেখা OP টানা হইয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, OC < OP।

প্রমাণ। OCP ত্রিভুজের ∠ OCP একটি সমকোণ;

∴ ∠ OPC একটি সূক্ষ্মকোণ। (উপ. ৮, অনু. ২)

∴ ∠ OPC < ∠OCP;

∴ OC < OP। (উপ. ১০)

এইরূপে, প্রমাণ করা যায় যে OQ, OR প্রভৃতি রেখা প্রত্যেকে OC হইতে বৃহত্তর; অতএব OC-ই ক্ষুদ্রতম রেখা।

টীকা। OC রেখাকে লম্ব, এবং OP, OQ, OR প্রভৃতি রেখাকে **তির্যক রেখা** (oblique) বলে।

অনুসিদ্ধান্ত ১। যদি দুইটি তির্যক রেখা OP ও OQ এমন হয় যে CP = CQ, তবে OP = OQ হইবে।

অনুসিদ্ধান্ত ২। যদি দুইটি তির্যক রেখা OQ, OR এমন হয় যে CQ<CR, তবে OQ<OR হইবে।

অনুসিদ্ধান্ত ৩। কোন বহিঃস্থ বিন্দু হইতে কোন সরলরেখার উপর যতগুলি সরলরেখা টানা যায়, তন্মধ্যে যেটি ক্ষুদ্রতম সেইটিই লম্ব হইবে।

(কারণ, বহিঃস্থ বিন্দু হইতে একটি মাত্র লম্ব টানা সম্ভব এবং এই লম্বটি সর্বাপেক্ষা ক্ষুদ্রতম রেখা)

অনুশীলনী ১৭

১। ABC ত্রিভুজের A শীর্ষকোণের দ্বিখণ্ডক BC কে X বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। যদি AB>AC হয়, প্রমাণ কর AXC কোণটি সূক্ষ্মকোণ ; এবং ∠AXB>∠AXC।

২। ABC ত্রিভুজের A শীর্ষকোণের দ্বিখণ্ডক BC কে X বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। দেখাও AB>BX এবং AC>CX।

৩। একটি চতুর্ভুজের AB, BC, CD, DA বাহুগুলি ক্রমশঃ কম দৈর্ঘ্যের হইলে ∠CDA>∠CBA হইবে।

৪। ABCD চতুর্ভুজের AC কর্ণটি শীর্ষকোণদ্বয়ের দ্বিখণ্ডক হইলে, কর্ণটি অপর কর্ণ BD র উপর লম্ব।

৫। ABCD চতুর্ভুজের বৃহত্তম বাহু হইল AD এবং ক্ষুদ্রতম বাহু BC। প্রমাণ কর যে ∠ABC>∠ADC, এবং ∠BCD>∠BAD।

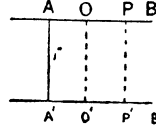
৬। কোন ত্রিভুজের শীর্ষ হইতে ভূমি পর্যন্ত যত সরলরেখাই টানা যাক না কেন তাহারা ত্রিভুজের অপর দুই বাহুর বৃহত্তরটি অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

৭। ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ এবং O ইহার অন্তঃস্থ একটি বিন্দু। প্রমাণ কর OA+OB>OC।

ষষ্ঠ অধ্যায়

সমান্তরাল সরলরেখা

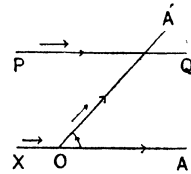
৪৩। **সমান্তরাল সরলরেখা** (Parallel Straight Lines)

এক ইঞ্চি দীর্ঘ একটি সরলরেখা AA′ লও ; ইহার দুই প্রান্তে দুইটি লম্ব AB ও A′B′ অঙ্কন কর। ABর উপর যে কোন দুইটি বিন্দু O ও P লও, এবং O ও P হইতে A′B′ এর উপর OO′ ও PP′ লম্ব টান। ডিভাইডার দ্বারা মাপিয়া দেখ OO′ = PP′ = AA′ = 1″ হইয়াছে ; AB ও A′B′ এই দুইটি সরলরেখার অন্তরাল (অর্থাৎ ব্যবধান) সর্বত্র সমান। AB ও A′B′কে যদি উভয় দিকে যথেচ্ছ বর্ধিত করা যায় তাহা হইলেও ইহারা পরস্পর মিলিত হইবে না। এই প্রকার রেখার নাম **সমান্তরাল** (Parallel) সরলরেখা।

দুইটি সরলরেখা যদি এক সমতলে থাকে, এবং উভয়দিকে যথেচ্ছ বর্ধিত করিলেও উহারা পরস্পর মিলিত না হয়, তবে তাহাদিগকে সমান্তরাল সরলরেখা বলে।

মন্তব্য। সমান্তরাল রেখা দুইটি এক সমতলে অবস্থিত হওয়া চাই-ই। কারণ, বিভিন্ন তলে অবস্থিত দুইটি সরলরেখা উভয় দিকে যথেচ্ছ বর্ধিত করিলেও পরস্পর মিলিত নাও হইতে পারে ; কিন্তু তখন তাহারা সমান্তরাল হইবে না। উদাহরণস্বরূপ বলা যাইতে পারে যে, ঘরের মেঝে ও ইহার দৈর্ঘ্যের দেয়ালের মিলনে যে সরলরেখা উৎপন্ন হইয়াছে সেই রেখা, এবং ঘরের ছাদ ও প্রস্থের দিকের দেয়ালের মিলনে উৎপন্ন রেখাকে উভয়দিকে বর্ধিত করিলে পরস্পর মিলিত হইবে না ; কিন্তু ইহারা সমান্তরাল নহে। এই প্রকার সরলরেখাকে নৈকতলীয় (Skew) রেখা বলে।

৪৪। **প্লেফেয়ারের স্বতঃসিদ্ধ** (Playfair's Axiom)

চিত্র

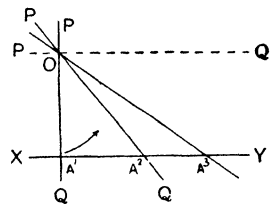
মনে কর, X একটি বিন্দু, এবং ইহার পূর্বদিকে অবস্থিত A অপর একটি বিন্দু। P তৃতীয় একটি বিন্দু এবং Q বিন্দুটি ইহার ঠিক পূর্বদিকে অবস্থিত। একটি লোক X বিন্দু হইতে যাত্রা করিয়া XA সরলরেখার উপর দিয়া ঠিক পূর্বদিকে A বিন্দু বরাবর চলিতে লাগিল। আর একটি লোক ঐ প্রকার P হইতে যাত্রা করিয়া A এর দিকে PQ সরলরেখার

উপর দিয়া যাইতে আরম্ভ করিল। ইহাদের গমনপথের **দিক্** পরিবর্তন হইল না, সুতরাং ইহাদের কখনও পরস্পর দেখা হওয়ার সম্ভাবনা নাই। দ্বিতীয় লোকটি যদি Q হইতে পশ্চিম দিকে P অভিমুখে রওনা হয়, তাহা হইলেও ইহাদের দেখা হইতে পারে না। কিন্তু, যদি প্রথম লোকটি X হইতে A এর দিকে যাত্রা করিয়া O বিন্দুতে আসিয়া A′ বিন্দুর দিকে রওনা হয়, তবে ইহার দিক পরিবর্তন হইবে, এবং এই পরিবর্তনের পরিমাণ AOA′ কোণ দ্বারা সূচিত হইবে। OA′ এর দিকে চলিতে চলিতে দ্বিতীয় লোকটির সহিত ইহার দেখা হওয়ার সম্ভাবনা আছে, অর্থাৎ OA′ রেখা PQ রেখাকে ছেদ করিবেই। ইহা হইতে বুঝা যায় যে, যদি দুইটি সমান্তরাল সরলরেখা একই দিকে অথবা বিপরীত দিকে (যথা, পূর্ব বা পশ্চিমে) প্রসারিত হয়, তবে এই দুইটি সরলরেখা (পূর্ব বা পশ্চিম ভিন্ন) অন্য দিকে প্রসারিত যে কোন সরলরেখাকে ছেদ করিবেই।

ইহা হইতে আমরা সিদ্ধান্ত করিতে পারি যে—

দুইটি পরস্পরচ্ছেদী সরলরেখা তৃতীয় কোন রেখার সহিত উভয়েই সমান্তরাল হইতে পারে না। কোন বিন্দুর ভিতর দিয়া একটি মাত্র সরলরেখা টানা যাইতে পারে যাহা অন্য একটি সরলরেখার সহিত সমান্তরাল হইবে।

সমান্তরাল সরলরেখার এই বিশেষ ধর্মকে **প্লেফেয়ারের স্বতঃসিদ্ধ** বলে।

৪৫। সমান্তরাল সরলরেখার অন্যপ্রকার ধারণা

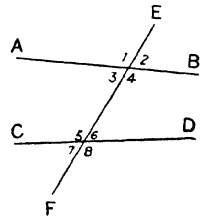
মনে কর, XY একটি স্থির সরলরেখা এবং O একটি স্থির বিন্দু। PQ যে কোন একটি সরলরেখা O বিন্দুর ভিতর দিয়া চলিয়া XY কে A^1 বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। PQ সরলরেখায় মাত্র একটি বিন্দু O স্থির, সুতরাং ইহাকে O বিন্দুর চতুর্দিকে ঘুরান যাইতে পারে। O বিন্দুকে স্থির রাখিয়া PQ রেখাকে যদি তীরনির্দিষ্ট দিকে ঘুরান যায়, তবে

চিত্র ৭৪

ইহার XY এর সহিত ছেদ বিন্দুগুলি A^1 A^2, A^3 ইত্যাদি ক্রমশঃ দূরে সরিয়া

যাইবে এবং $\angle XA^1O$ কোণটি ক্রমশঃ ক্ষুদ্রতর হইতে থাকিবে। এখন যদি কল্পনা করা যায় যে, A^1 বিন্দুটি ক্রমশঃ সরিতে সরিতে অসীমে যাইয়া পৌছায়, তবে XA^1Q কোণটি বিলুপ্ত হইবে; এই অবস্থায় PQ রেখাটি XY এর সহিত সমান্তরাল হইবে। সুতরাং দুইটি সমান্তরাল সরলরেখা অসীমে মিলিত হয় ধারণা করিতে পারা যায়।

৪৬। **ভেদক** (Transversal)

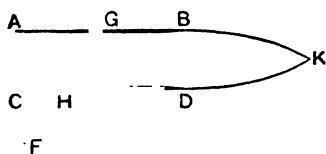
যে সরলরেখা দুই বা ততোধিক সরলরেখাকে ছেদ করে তাহাকে **ভেদক** বলে।

একটি সরলরেখা অপর দুইটি সরলরেখাকে ভেদ করিলে সর্বসমেত আটটি কোণ উৎপন্ন হয়। এই কোণগুলির বিভিন্ন নাম আছে। ৭৫ চিত্রে EF সরলরেখা, AB ও CD সরলরেখাকে ভেদ করিয়াছে দেখান হইয়াছে; ইহাতে 1, 2, 3, 4 প্রভৃতি আটটি কোণ উৎপন্ন হইয়াছে।

চিত্র ৭৫

1, 2, 7, 8 চিহ্নিত কোণগুলির নাম **বহিঃস্থ** (Exterior) কোণ; 3, 4, 5, 6 চিহ্নিত কোণগুলির নাম **অন্তঃস্থ** (Interior) কোণ; (4,5), (3,6) চিহ্নিত কোণগুলির নাম **একান্তর** (Alternate) কোণ; এবং (1, 5), (3, 7), (2, 6) (4, 8) চিহ্নিত কোণগুলির নাম **অনুরূপ** (Corresponding) কোণ।

উপপাদ্য ১৩ (Theorem 13)

একটি সরলরেখা অপর দুইটি সরলরেখাকে ছেদ করিলে, যদি (১) একান্তর কোণগুলি সমান হয়, অথবা (২) উহার একই পার্শ্বে অবস্থিত বহিঃকোণ অন্তঃকোণের সহিত সমান হয়, অথবা (৩) উহার একই পার্শ্বে অবস্থিত অন্তঃকোণ দুইটির সমষ্টি দুই সমকোণ হয়, তবে শেষোক্ত দুইটি সরলরেখা সমান্তরাল হইবে।

[If a straight line, cutting two other straight lines, makes (1) the alternate angles equal, or (2) an exterior angle equal to the interior opposite angle on the same side of it. or (3) the interior angles on the same side of it together equal to two right angles then those two straight lines are parallel *Euc.* 1. 27, 28]

চিত্র ৭৬

EF সরলরেখা, AB ও CD দুইটি সরলরেখাকে G ও H বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

(১) যদি ∠AGH = একান্তর ∠GHD হয়, তবে

প্রমাণ করিতে হইবে যে, AB ও CD সমান্তরাল।

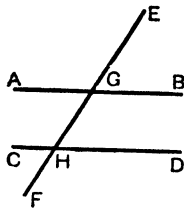
প্রমাণ। যদি AB ও CD সমান্তরাল না হয়, তবে ইহাদিগকে যে দিকে হউক বর্ধিত করিলে ইহারা পরস্পর ছেদ করিবে।

মনে কর, ইহারা B ও Dএর দিকে বর্ধিত হইয়া K বিন্দুতে ছেদ করে; তাহা হইলে GKH একটি ত্রিভুজ হইবে; এবং এই ত্রিভুজের বহিঃস্থ কোণ AGH, অন্তঃস্থ বিপরীত কোণ GHK অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে। (উপ. ৮)

কিন্তু দেওয়া আছে যে এই দুইটি কোণ সমান।

∴ AB ও CD যথাক্রমে B ও Dর দিকে বর্ধিত হইলে পরস্পর ছেদ করিতে পারে না।

এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে, AB ও CD যথাক্রমে A ও Cর দিকে বর্ধিত হইলেও পরস্পর ছেদ করিতে পারে না।

∴ AB ও CD সমান্তরাল।

চিত্র ৭৭

(২) যদি বহিঃ ∠EGB = অন্তঃ ∠GHD হয়,

প্রমাণ করিতে হইবে যে, AB ও CD সমান্তরাল।

প্রমাণ। ∵ ∠EGB = ∠GHD (স্বীকার)

এবং ∵ ∠EGB = ∠AGH (বিপ্রতীপ)

∴ ∠AGH = ∠GHD।

এবং, এই দুইটি কোণ একান্তর,

∴ AB ও CD সমান্তরাল।

(৩) যদি ∠BGH + ∠GHD = 2 সমকোণ হয়,

প্রমাণ করিতে হইবে যে, AB ও CD সমান্তরাল;

প্রমাণ। ∵ ∠BGH + ∠GHD = 2 সমকোণ (স্বীকার)

এবং ∵ ∠BGH + ∠AGH = 2 সমকোণ (উপ. ১)

∴ ∠BGH + ∠GHD = ∠BGH + ∠AGH;

এই দুই সমান বস্তু হইতে ∠BGH বাদ দাও,

তাহা হইলে, ∠GHD = ∠AGH হইবে

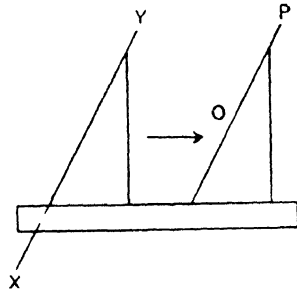
কিন্তু এই দুইটি কোণ একান্তর কোণ;

∴ AB ও CD সমান্তরাল।

অনুসিদ্ধান্ত। যদি দুইটি সরলরেখার **প্রত্যেকটি** একটি তৃতীয় সরলরেখার উপর লম্ব হয়, তবে সরলরেখা দুইটি সমান্তরাল হইবে।

অনুগামী সম্পাদ্য। কোন নির্দিষ্ট বিন্দুর ভিতর দিয়া এবং একটি সরলরেখার সহিত সমান্তরাল করিয়া একটি সরলরেখা টানিতে হইবে—এই সম্পাদ্য সমাধানের ইঙ্গিত উক্ত উপপাদ্য হইতেই পাওয়া যায়। মনে কর, AB একটি সরলরেখা এবং H একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। আমরা HG রেখা টানিয়া ABকে G বিন্দুতে ছেদ করিতে পারি এবং ∠AGH এর সহিত H বিন্দুতে GHD কোণ (সম্পাদ্য. ৫ অনুসারে) অঙ্কন করিলেই CD রেখা অঙ্কিত হইবে।

ত্রিকোণীর ব্যবহার। ব্যবহারিক কার্যে সমান্তরাল সরল রেখা ত্রিকোণী সাহায্যেই অঙ্কিত হইয়া থাকে।

৭৮ চিত্রে XY একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা; O একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। ত্রিকোণীর একটি ধার XY এর সহিত মিশাইয়া রাখ এবং অপর ধারে রুলার মিশাইয়া রাখ।

চিত্র ৭৮

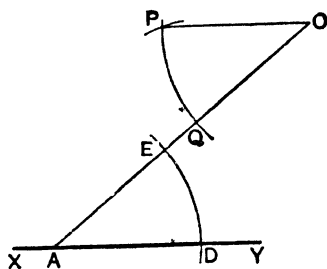
এইবার রুলার চাপিয়া ধরিয়া তীরচিহ্নিত দিকে ত্রিকোণী সরাইয়া O বিন্দুর উপর ত্রিকোণীর ধার রাখ, এবং ত্রিকোণীর ধারে সরলরেখা টানিয়া দাও। OP ও XY সমান্তরাল হইবে।

(শিক্ষক মহাশয় ত্রিকোণীর ব্যবহার দ্বারা **সমান্তরাল রেখা** ও **লম্ব অঙ্কন** প্রণালী শিখাইয়া দিবেন)

সম্পাদ্য ৬ (Problem 6)

কোন নির্দিষ্ট বিন্দুর মধ্য দিয়া এমন একটি সরলরেখা অঙ্কিত করিতে হইবে যাহা একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান্তরাল হইবে।

[Through a given point to draw a straight line parallel to a given straight line. *Euc*. 1. 31.]

চিত্র ৭৯

XY একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা এবং O একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। O বিন্দুর মধ্য দিয়া XY এর সমান্তরাল একটি সরলরেখা অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। XYএর উপর একটি বিন্দু A লও; AO যোগ কর।

O বিন্দুতে, OAর সহিত $\angle$OAY এর সমান এবং একান্তর করিয়া AOP কোণটি অঙ্কিত কর। (সম্পাদ্য ৫)

PO সরলরেখা XYএর সমান্তরাল হইবে।

প্রমাণ। $\therefore$ $\angle$YAO = $\angle$POA এবং ইহারা একান্তর;

$\therefore$ PO $\parallel$ XY।

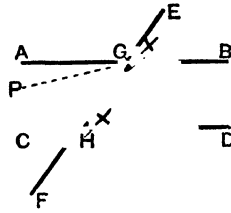
উপপাদ্য ১৪ (Theorem 14)

একটি সরলরেখা দুইটি সমান্তরাল সরলরেখাকে ছেদ করিলে,

(১) একান্তর কোণ দুইটি পরস্পর সমান হইবে,

(২) অনুরূপ কোণ দুইটি পরস্পর সমান হইবে,

এবং (৩) ভেদকের একপার্শ্বস্থ অন্তঃস্থ কোণ দুইটির সমষ্টি দুই সমকোণ হইবে।

[If a straight line cuts two parallel straight lines, it makes (1) the alternate angles equal, (2) the corresponding angles equal and (3) the two interior angles on the same side of the cutting line together equal to two right angles. *Euc.* 1. 29.]

চিত্র ৮০

EF সরলরেখা AB ও CD সমান্তরাল রেখা দুইটিকে G ও H বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

(১) প্রমাণ করিতে হইবে যে,

∠AGH = একান্তর ∠DHG।

প্রমাণ। মনে কর, ∠AGH ও ∠DHG পরস্পর সমান নয়।

PG রেখা টানিয়া PGH কোণ DHG কোণের সমান কর।

∠PGH ও ∠DHG একান্তর হইল;

অতএব, PG ও CD সমান্তরাল হইবে। (উপ. ১৩)

কিন্তু, AB ও CD সমান্তরাল; (স্বীকার)

∴ AB ও PG এই দুইটি পরস্পরচ্ছেদী রেখা CDর সমান্তরাল হইবে; কিন্তু ইহা অসম্ভব। (প্লেফেয়ার স্বতঃসিদ্ধ)

∴ ∠AGH ও ∠DHG অসমান হইতে পারে না ;

∴ ∠AGH = ∠DHG ।

(২) প্রমাণ করিতে হইবে যে, ∠EGB = ∠GHD ।

প্রমাণ । ∵ ∠AGH = ∠GHD (প্রমাণিত)

এবং ∵ ∠AGH = ∠EGB ; (বিপ্রতীপ)

∴ ∠EGB = ∠GHD ।

(৩) প্রমাণ করিতে হইবে যে,

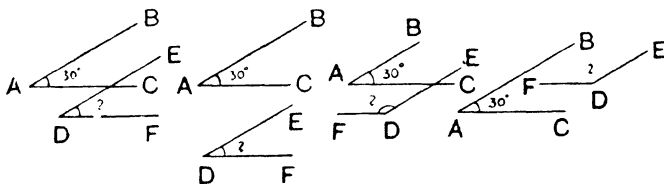
∠BGH + ∠GHD = 2 সমকোণ ।

প্রমাণ । ∵ ∠GHD = ∠EGB, (প্রমাণিত)

∴ ∠BGH + ∠GHD = ∠BGH + ∠EGB

= 2 সমকোণ । (উপ.

অনুশীলনী ১৮

১ । নিম্ন চিত্রগুলিতে AB ∥ DE এবং AC ∥ DF ও ∠A এর পরিমাণ দেওয়া আছে ; ∠D এর পরিমাণ কত ?

চিত্র ৮১

প্রমাণ কর যে একটি কোণের দুইটি বাহু যথাক্রমে অপর একটি কোণের দুইটি বাহুর সমান্তরাল হইলে, কোণ দুইটি পরস্পর সমান অথবা সম্পূরক হইবে ।

২ । ৮২ চিত্রে AB ∥ EC, BD সরলরেখা ।

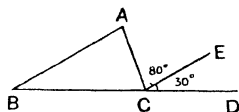
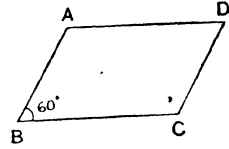
∠A = কত ডিগ্রি ?

∠B = কত ডিগ্রি ?

∠C = কত ডিগ্রি ?

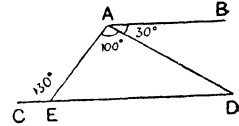
∠A + ∠B + ∠C = কত ডিগ্রি ?

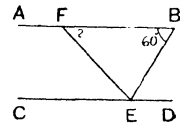
চিত্র ৮২

প্রমাণ কর, একটি ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ ।

৩। ৮৩ চিত্রে AD ∥ BC এবং AB ∥ DC।
যদি $\angle B = 60°$ হয়, তবে
$\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ কত ডিগ্রি ?

চিত্র ৮৩

সংজ্ঞা। কোন চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলি সমান্তরাল হইলে ইহাকে **সামান্তরিক** (parallelogram) বলে। ৮৩ চিত্রে ABCD একটি সামান্তরিক।

প্রমাণ কর যে সামান্তরিকের বিপরীত কোণগুলি পরস্পর সমান।

৪। ৮৪ চিত্রে AB ও CD
সমান্তরাল কি ? কারণ দেখাও।

চিত্র ৮৪

৫। ৮৫ চিত্রে AB, CD সমান্তরাল এবং EF, BEC কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। যদি $\angle B = 60°$ হয়, তবে $\angle EFB$ = কত ডিগ্রি ?

চিত্র ৮৫

৬। ইতঃপূর্বে বলা হইয়াছে যে, দুইটি সমান্তরাল সরলরেখা একই বা বিপরীত দিক্ নির্দেশ করে, এবং বিভিন্ন দিকে প্রসারিত সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ দিক্ পরিবর্তনের পরিমাণ নির্দেশ করে। এই সূত্র ধরিয়া উপপাদ্য ১৩ ও ১৪ প্রমাণ কর।

৭। ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ ; ইহার AB = AC ; BCর সহিত সমান্তরাল AP টান। প্রমাণ কর যে AP, ত্রিভুজের A বিন্দুস্থ বহিঃ কোণের সমদ্বিখণ্ডক।

৮। একটি ত্রিভুজের কোন বহিঃকোণের সমদ্বিখণ্ডক সরলরেখা যদি ইহার বিপরীত বাহুর সমান্তরাল হয়, তবে ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু হইবে।

[If the external bisector of an angle of a triangle is parallel to the opposite side, the triangle is isosceles.]

৯। একই বাহুর বিপরীত পার্শ্বে দুইটি সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত করিলে যে ক্ষেত্রটি হয় তাহা সামান্তরিক। (কঃ প্রঃ ১৯২৬)

১০। ত্রিভুজের একটি বাহুর যে কোন বিন্দু হইতে অপর একটি বাহুর সমান্তরাল রেখা টানিলে যে ত্রিভুজটি উৎপন্ন হয় তাহা মূল ত্রিভুজের সহিত সদৃশকোণী হইবে।

১১। কোন কোণের সমদ্বিখণ্ডক রেখাস্থ একটি বিন্দু হইতে যদি একটি বাহুর সমান্তরাল রেখা টানা যায় তবে একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত হইবে।

১২। ABC সমবাহু ত্রিভুজের BC ভূমিস্থ D বিন্দু হইতে ভূমির উপর লম্ব টানা হইল; ইহা AB কে E বিন্দুতে ছেদ করিল এবং CAর বর্ধিতাংশকে F বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে $\triangle AEF$ সমদ্বিবাহু।

১৩। ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের BC ভূমির সমান্তরাল DE রেখা, AB ও AC কে (কিংবা উহাদের বর্ধিতাংশকে) যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে; BE ও CD পরস্পর F বিন্দুতে ছেদ করিলে $\triangle DEF$ সমদ্বিবাহু হইবে।

১৪। প্রমাণ কর যে দুইটি সমান্তরাল সরলরেখার ভেদকের একই পার্শ্বে অবস্থিত দুইটি অন্তঃস্থ কোণের সমদ্বিখণ্ডক রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণটি সমকোণ হইবে।

(Prove that the angle contained by the internal bisectors of the two interior angles on the same side of a straight line which cuts two parallel straight lines is a right angle,)

১৫। সামান্তরিকের একটি কোণ সমকোণ হইলে, সকল কোণই সমকোণ হইবে।

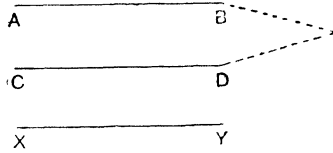
১৬। ABCD একটি চতুর্ভুজ। ইহার $AB \parallel DC$। $\angle A$এর সমদ্বিখণ্ডক রেখা DCকে E বিন্দুতে ছেদ করে। যদি $\angle D = 54^\circ$, তবে $\angle AED =$ কত হইবে ?

১৭। দুইটি পরস্পর ছেদী সরল রেখার প্রত্যেকটির উপর অঙ্কিত লম্ব দুইটিও পরস্পর ছেদ করিবে।

১৮। কোন সরলরেখার সমান্তরাল সরল রেখাগুলি পরস্পর সমান্তরাল।

উপপাদ্য ১৫ (Theorem 15)

কোন সরলরেখার সমান্তরাল সরলরেখাগুলি পরস্পর সমান্তরাল।

[Straight lines which are parallel to the same straight line are parallel to one another. *Euc*. 1. 30.]

চিত্র ৮৬

মনে কর, AB ও CD সরলরেখাদ্বয়ের প্রত্যেকটি XY সরলরেখার সমান্তরাল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, AB ও CD পরস্পর সমান্তরাল।

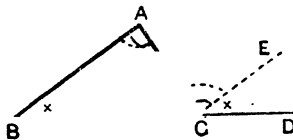
প্রমাণ। AB ও CD পরস্পর সমান্তরাল না হইলে, ইহাদিগকে বর্ধিত করিলে পরস্পর ছেদ করিবে ; এবং পরস্পর ছেদী সরলরেখা AB ও CD উভয়েই XY রেখার সমান্তরাল হইবে ; কিন্তু প্লেফেয়ারের স্বতঃসিদ্ধ অনুসারে ইহা হইতে পারে না। অতএব, AB ও CD বর্ধিত হইলে পরস্পর ছেদ করিতে পারে না।

অতএব AB ও CD সমান্তরাল হইবে।

বিকল্প প্রমাণ। একটি ভেদক টানিয়া দেখাও যে, AB ও CD স্থিত একান্তর কোণ সমান, সুতরাং AB ও CD সমান্তরাল।

উপপাদ্য ১৬ (Theorem 16)

যে কোন ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ।

[Three angles of a triangle are together equal to two right angles. *Euc.* 1. 32.]

চিত্র ৮৭

ABC একটি ত্রিভুজ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 2$ সমকোণ।

অঙ্কন। BC বাহুকে D পর্যন্ত বর্ধিত কর; এবং C বিন্দু হইতে CE সরলরেখা BA বাহুর সমান্তরাল করিয়া টান।

প্রমাণ। $\because$ BA এবং CE সমান্তরাল, এবং AC ইহাদিগকে ছেদ করে,

$\therefore \angle ACE =$ একান্তর $\angle CAB$। (উপ. ১৪)

আবার, BA ও CE সমান্তরাল রেখাদ্বয়কে BCD ছেদ করে,

$\therefore \angle ECD =$ অনুরূপ $\angle ABC$। (উপ. ১৪)

অতএব, $\angle CAB + \angle ABC = \angle ACE + \angle ECD$

$= \angle ACD$।

এই দুই সমান বস্তুতে $\angle BCA$ যোগ কর।

তাহা হইলে, $\angle CAB + \angle ABC + \angle BCA$

$= \angle ACD + \angle BCA$

$= 2$ সমকোণ। (সন্নিহিত কোণ, উপ. ১)

$\therefore \angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 2$ সমকোণ।

অনুসিদ্ধান্ত ১। একটি সমকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণ দুইটি পূরককোণ।

অনুসিদ্ধান্ত ২। একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণ যথাক্রমে অপর একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণের সমান হইলে, উভয়ের তৃতীয় কোণ দুইটি পরস্পর সমান হইবে।

অনুসিদ্ধান্ত ৩। সমবাহু ত্রিভুজের প্রত্যেকটি কোণের পরিমাণ 60°।

সমবাহু ত্রিভুজের কোণগুলি পরস্পর সমান ;

স্থতরাং, প্রত্যেকটি কোণ $= \frac{1}{3} \times$ কোণের সমষ্টি

$= \frac{1}{3} \times 180^\circ = 60^\circ$।

অনুসিদ্ধান্ত ৪। একটি চতুর্ভুজের চারিটি কোণের সমষ্টি 4 সমকোণ।

চতুর্ভুজের একটি কর্ণ টানিলে ইহা দুইটি ত্রিভুজে বিভক্ত হইবে, এবং চতুর্ভুজের চারিটি কোণ এই দুইটি ত্রিভুজের ছয়টি কোণের সমষ্টি হইবে।

অনুসিদ্ধান্ত ৫। কোন ত্রিভুজের একটি কোণ যদি অপর দুই কোণের সমষ্টির সমান হয়, তবে ত্রিভুজটি সমকোণী ; যদি সমষ্টি অপেক্ষা ন্যূন হয়, তবে ত্রিভুজটি সূক্ষ্মকোণী ; এবং যদি সমষ্টি অপেক্ষা অধিক হয়, তবে ত্রিভুজটি স্থূলকোণী।

বিশেষ দ্রষ্টব্য। (১) এই উপপাদ্যেই প্রমাণিত হইয়াছে যে,

$$\angle ACD = \angle CAB + \angle ABC$$।

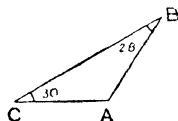
অতএব, কোন ত্রিভুজের একটি বাহু বর্ধিত হইলে যে বহিঃস্থ কোণ হয় তাহা অন্তঃস্থ বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টির সহিত সমান হইবে।

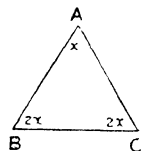
[If one side of a triangle is produced, the exterior angle so formed is equal to the sum of the two interior opposite angles]

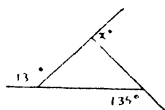
(উপপাদ্য ৮ এর সহিত এই সিদ্ধান্ত তুলনার যোগ্য)

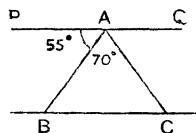
(২) ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি $= 180^\circ$।

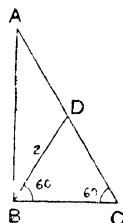
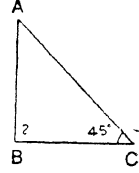
অনুশীলনী ১৯

১। ৮৮ চিত্রে $\angle BAC =$ কত ডিগ্রি ?

চিত্র ৮৮

২। ৮৯ চিত্রে $\angle A = x^\circ$, $\angle B = 2x^\circ$, $\angle C = 2x^\circ$। প্রত্যেকটি কোণের পরিমাণ কত ?

চিত্র ৮৯

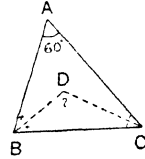
৩। ৯০ চিত্রে $x^\circ =$ কত ?

চিত্র ৯০

৪। ৯১ চিত্রে $PQ \parallel BC$। প্রমাণ কব $AB = AC$।

চিত্র ৯১

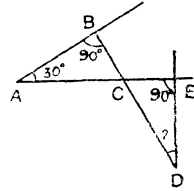
৫। ৯২ চিত্রে $\angle ABC = 90^\circ$। $AC =$ কত ইঞ্চি ?

৬। $AB = BC$; $\angle ABC =$ কত ডিগ্রি ? কোন সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের একটি কোণ সমকোণ হইলে অপর দুইটি সূক্ষ্মকোণের পরিমাণ কত ? ৯৩ চিত্র দেখিয়া ইহার উত্তর দাও।

চিত্র ৯৩

৭। ৯৪ চিত্রে BD ও CD যথাক্রমে $\angle B$ ও $\angle C$ কে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে।

$\angle A = 60°$; $\angle BDC =$ কত ডিগ্রি ?

প্রমাণ কর, $\angle BDC = 90° + \frac{1}{2}A$।

চিত্র ৯৪

৮। ৯৫ চিত্রে, $\angle D =$ কত ডিগ্রি ?

প্রমাণ কর যে দুইটি সরলরেখা যথাক্রমে অপর দুইটি সরলরেখার উপর লম্ব হইলে প্রথম দুইটি রেখার অন্তর্ভুর্ত সূক্ষ্মকোণ দ্বিতীয় দুইটি রেখার অন্তর্ভুর্ত সূক্ষ্মকোণের সমান হইবে।

চিত্র ৯৫

৯। একটি সমকোণী ত্রিভুজের একটি সূক্ষ্মকোণ অপর সূক্ষ্মকোণটির দ্বিগুণ হইলে, সূক্ষ্মকোণ দুইটির পরিমাণ কত ?

১০। কোন ত্রিভুজের ভূমিসংলগ্ন কোণ দুইটির সমষ্টি 108°, এবং তাহাদের অন্তর 16° ; ত্রিভুজের কোণগুলি নির্ণয় কর। (কঃ প্রঃ ১৯২৬)

১১। কোন ত্রিভুজের দুইটি কোণের সমষ্টি যদি তৃতীয় কোণের সহিত সমান হয় তবে ত্রিভুজটি সমকোণী হইবে। (কঃ প্রঃ ১৯২৮)

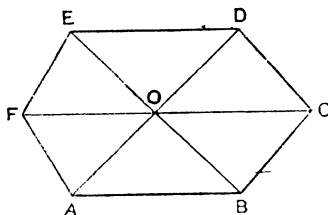
১২। ABC ত্রিভুজের $\angle B$ ও $\angle C$ এর বহির্দ্বিখণ্ডক রেখা দুইটি D বিন্দুতে মিলিত হইলে, প্রমাণ কর $\angle BDC = 90° - \frac{1}{2}A$।

১৩। সমকোণী ত্রিভুজের সমকৌণিক বিন্দু ও অতিভুজের মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা অতিভুজের অর্ধেক হইবে।

[The straight line joining the middle point of the hypotenuse and the right-angular point of a right-angled triangle is half the hypotenuse.]

উপপাদ্য ১৬ (ক) (Theorem 16A)

কোন কুব্জ বহুভুজের অন্তঃস্থ কোণসমূহের সমষ্টির সহিত চার সমকোণ যোগ করিলে যোগফল ঐ বহুভুজের যতগুলি বাহু থাকিবে তাহার দ্বিগুণ পরিমাণ সমকোণের সমান হইবে

[All the interior angles of a convex polygon together with four right-angles make up twice as many right angles as the figure has sides.]

চিত্র ৯৬

মনে কর, ABCDEF একটি কুব্জ বহুভুজ এবং ইহার বাহুসংখ্যা n (অতএব ইহাকে n-ভুজ বলা যাইতে পারে)।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

n-ভুজের সকলকোণের সমষ্টি + 4 সমকোণ = $2n$ সমকোণ।

প্রমাণ। ধর, এই ক্ষেত্রের অন্তরস্থ O একটি বিন্দু ; ইহার সহিত OA, OB, OC ইত্যাদি প্রত্যেক কৌণিক বিন্দু যোগ কর। ইহাতে ক্ষেত্রটি, ইহার যতগুলি বাহু আছে ততগুলি ত্রিভুজে, অর্থাৎ n-ত্রিভুজে, বিভক্ত হইল।

এখন প্রত্যেকটি ত্রিভুজের কোণসমষ্টি = 2 সমকোণ,

$\therefore n$ সংখ্যক ত্রিভুজের কোণসমষ্টি = $2n$ সমকোণ।

---

* সংজ্ঞা। যে বহুভুজের অন্তঃস্থ কোণগুলির কোনটিই প্রবৃদ্ধকোণ নহে তাহাকে কুব্জ বহুভুজ (convex polygon) বলে। পঞ্চভুজ, ষড়ভুজ প্রভৃতিকে 5-ভুজ, 6-ভুজ, এবং n সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট ক্ষেত্রকে সংক্ষেপে n-ভুজ বলা যাইতে পারে।

কিন্তু, বহুভুজের অন্তঃস্থ কোণসমষ্টি + O বিন্দুস্থ সকলকোণ সমষ্টি

$=$ nসংখ্যক ত্রিভুজগুলির কোণসমষ্টি ;

অতএব, n-ভুজের অন্তঃস্থ কোণসমষ্টি $+4$ সমকোণ

$=2n$ সমকোণ।

মন্তব্য ১। n-ভুজের অন্তঃস্থ কোণ সমষ্টি $=(2n-4)$ সমকোণ।

২। বহুভুজ সুষম হইলে ইহার বাহুগুলি ও কোণগুলি পরস্পর সমান হইবে। অতএব একটি সুষম n-ভুজের প্রত্যেকটি কোণের পরিমাণ x সমকোণ হইলে,

$nx=(2n-4)$ সমকোণ হইবে,

অর্থাৎ, প্রতি কোণ $x=\dfrac{2n-4}{n}$ সমকোণ হইবে।

আবার, প্রত্যেকটি কোণ যদি d ডিগ্রি হয়, তবে n সংখ্যক কোণের সমষ্টি nd ডিগ্রি হইবে ; সুতরাং

$$nd+360^\circ=2n\times90^\circ=n.\ 180^\circ\ ;$$

$$\therefore\quad d=\frac{n-2}{n}\times180^\circ\text{।}$$

এই উপপাদ্য হইতে কোন বহুভুজের বাহুসংখ্যা দেওয়া থাকিলে অন্তঃকোণ সমষ্টি নির্ণয় করা যাইতে পারে ; যথা—

দৃষ্টান্ত ১। কোন ষড়ভুজের অন্তঃস্থ কোণগুলির সমষ্টি কত ?

অন্তঃস্থ কোণগুলির সমষ্টি $+4$ সমকোণ $=2\times6$ সমকোণ ;

$\therefore$ অন্তঃস্থ কোণ সমষ্টি $=8$ সমকোণ $=720^\circ$।

এই ষড়ভুজ সুষম হইলে প্রত্যেকটি কোণ

$=720^\circ\div6=120^\circ$ হইবে।

দৃষ্টান্ত ২। একটি সুষম 100-ভুজের প্রত্যেকটি কোণ কত ডিগ্রি ?

মনে কর, প্রত্যেকটি কোণ d ডিগ্রি ; তাহা হইলে

$100d+360^\circ=100\times180^\circ$,

অর্থাৎ, $100d=18000^\circ-360^\circ=17640^\circ$

$\therefore\quad d=17640\div100=176{\cdot}4^\circ$ ডিগ্রি।

দৃষ্টান্ত ৩। একটি সুষম বহুভুজের অন্তঃস্থ কোণ 108° হইলে ইহার বাহু সংখ্যা কত?

যদি বাহু সংখ্যা n হয় তবে
$n \times 108^\circ + 360^\circ = n \times 180^\circ$,
অর্থাৎ, $72n = 360^\circ$; $\therefore \quad n = 360 \div 72 = 5$।
$\therefore$ **ক্ষেত্রটি সুষম পঞ্চভুজ।**

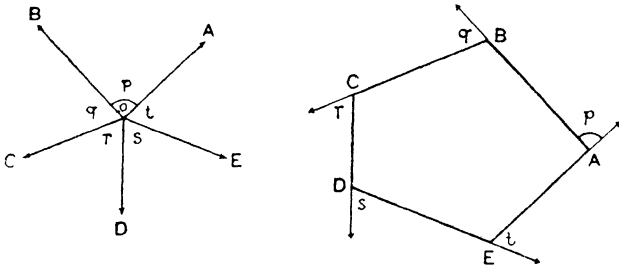
দ্রষ্টব্য। বাহু সংখ্যা খুব বেশী নয় এমন বহুভুজের অন্তঃকোণ সমষ্টির যোগফল এই সূত্রের সাহায্য না লইয়া চিত্র আঁকিয়া ত্রিভুজে বিভক্ত করিয়া নির্ণয় করাই শ্রেয়ঃ।

মন্তব্য ৩। সুষম বহুভুজের বাহুসংখ্যা যতই অধিক হউক না কেন, ইহার প্রতি অন্তঃ-কোণের পরিমাণ 180° র কম হইবে, এবং বাহুসংখ্যা অসীম হইলে উক্ত কোণপরিমাণ চরমে 180° হইবে।

মন্তব্য ২ হইতে $d = 180^\circ - \dfrac{360^\circ}{n}$; এখানে n অর্থাৎ বাহু সংখ্যা যত বর্ধিত হইবে, $\dfrac{360^\circ}{n}$ এর মান ততই কমিতে থাকিবে, সুতরাং d অর্থাৎ প্রতি অন্তঃকোণের পরিমাণ 180° হইতে কখনও অধিক হইতে পারে না ; অতএব, 180° ইহার চরম পরিমাণ।

উপপাদ্য ১৬ (খ) (Theorem 16B)

কোন কুব্জ বহুভুজের বাহুগুলি পর পর একই ক্রমে বর্ধিত হইলে যে সকল বহিঃস্থ কোণ উৎপন্ন হয় তাহাদের সমষ্টি চার সমকোণ হইবে।

[If the sides of a convex polygon are produced in order, then the sum of the exterior angles is equal to four right angles.]

চিত্র ৯৭

মনে কর, ABCDE···একটি n-বাহুবিশিষ্ট ক্ষেত্র ; ইহার বাহুগুলি পর্যায়-ক্রমে তীর নির্দিষ্ট দিকে বর্ধিত হইল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

A, B, C, D ইত্যাদি বিন্দুস্থ বহিঃকোণগুলির সমষ্টি = 4 সমকোণ।

প্রথম প্রণালী। O একটি বিন্দু লও। এবং OA, OB, OC, OD প্রভৃতি সরলরেখা যথাক্রমে EA,AB,BC, CD রেখার সহিত তীরনির্দিষ্ট দিকে প্রসারিত করিয়া সমান্তরাল করিয়া টান।

প্রমাণ। $\because$ EA ∥ OA এবং OB ∥ AB,

$\therefore$ A বিন্দুস্থ বহিঃকোণ $p = \angle AOB$।

এইরূপে, B বিন্দুস্থ বহিঃকোণ $q = \angle BOC$,

C " " $r = \angle COD$।

অতএব A, B, C, D ইত্যাদি বিন্দুস্থ বহিঃকোণ

$= \angle p + \angle q + \angle r + \cdots$

= O বিন্দুর-বেষ্টিত কোণগুলি = 4 সমকোণ।

দ্বিতীয় প্রণালী। বহুভুজের প্রত্যেক কৌণিক বিন্দুস্থ বহিঃকোণ ও অন্তঃকোণের যোগফল $=2$ সমকোণ,

অতএব, বহুভুজের বাহুসংখ্যা যদি n হয়,

তবে, n বহিঃকোণের সমষ্টি $+ n$ অন্তঃকোণের সমষ্টি $= 2n$ সমকোণ।

কিন্তু, উপ. ১৬ক অনুযায়ী

n অন্তঃকোণের সমষ্টি $+ 4$ সমকোণ $= 2n$ সমকোণ।

অতএব, n বহিঃকেণের সমষ্টি $+ n$ অন্তঃকোণের সমষ্টি

$=$ n অন্তঃকোণর সমষ্টি $+ 4$ সমকোণ ;

$\therefore$ n বহিঃকোণের সমষ্টি $= 4$ সমকোণ।

মন্তব্য। এই উপপাদ্য হইতে কোন সুষম বহুভুজের একটি বহিঃকোণ প্রদত্ত থাকিলে ইহার বাহুর সংখ্যা নির্ণয় করা যায়, অন্তঃকোণ প্রদত্ত থাকিলে বাহুর সংখ্যা নির্ণয় করা যায় ; এবং বাহুর সংখ্যা প্রদত্ত থাকিলেও অন্তঃকোণ নিণয় করা যায়।

দৃষ্টান্ত ১। কোন সুষম বহুভুজের বহিঃকোণের পরিমাণ $72°$; বাহুসংখ্যা কত?

বহুভুজটীর বহিঃকোণের সমষ্টি $360°$, এবং প্রতি কোণ $72°$

$\because$ বাহুসংখ্যা $= 360 \div 72° = 5$ হইবে।

দৃষ্টান্ত ২। কোন সুষম বহুভুজের প্রতি অন্তঃকোণ $120°$; বাহুর সংখ্যা কত ?

ইহার প্রতি বহিঃকোণ $= 180° - 120° = 60°$, এবং বহিকোণের সমষ্টি $= 360°$।

অতএব বাহুসংখ্যা $= 360° \div 60° = 6$।

দৃষ্টান্ত ৩। কোন সুষম বহুভুজের বাহুসংখ্যা 7, প্রতি বহিঃকোণ ও অন্তঃকোণের পরিমাণ কত ?

বহিঃকোণের সমষ্টি $= 360°$, বাহুসংখ্যা 7 ; অতএব কোণসংখ্যা $= 7$;

$\therefore$ প্রতি বহিঃকোণ $= \frac{360°}{7} = 51\frac{3°}{7}$

$\because$ প্রতি অন্তঃকোণ $= 180° - 51\frac{3°}{7} = 128\frac{4°}{7}$

দৃষ্টান্ত ৪। একটি সুষম বহুভুজের অন্তঃকোণ $127°$ হইতে পারে কি ?

প্রতি অন্তঃকোণ $= 127°$

$\therefore$ প্রতি বহিঃকোণ $= 180° - 127° = 53°$

কিন্তু বহিঃকোণের সমষ্টি $= 360°$

$\therefore$ বাহু সংখ্যা $= \frac{360}{53} = 6\frac{42}{58}$।

বাহু সংখ্যা ভগ্নাংশ হইতে পারে না ; অতএব, এমন কোন সুষম বহুভুজ নাই যাহার অন্তঃকোণ $127°$ হইবে।

অনুশীলনী ২০

১। নিম্নে কয়েকটি বহুভুজের বাহু সংখ্যা দেওয়া হইল। প্রত্যেকটির অন্তঃকোণের সমষ্টি কত?

(1) 5, (2) 7, (3) 8, (4) 10, (5) 12, (6) 15, (7) 25

২। নিম্নে কয়েকটি বহুভুজের অন্তঃকোণের সমষ্টি দেওয়া হইল; প্রত্যেকটির বাহু সংখ্যা নির্ণয় কর।

(1) 180°, (2) 360°, (3) 540°, (4) 900°, (5) 2340°

৩। নিম্নে কয়েকটি সুষম বহুভুজের প্রতি অন্তঃকোণের পরিমাণ দেওয়া হইল; বাহুসংখ্যা নির্ণয় কর।

60°, 108°, 120°, 156°, 156°

৪। নিম্নে কয়েকটি সুষম বহুভুজের প্রতি বহিঃকোণের পরিমাণ দেওয়া হইল; বাহুর সংখ্যা নির্ণয় কর।

120°, 36°, 24, 15°, 10°

৫। নিম্নে কতকগুলি কোণের পরিমাণ দেওয়া হইল; ইহাদের মধ্যে কোন্ কোণটি সুষম বহুভুজের অন্তঃকোণ হইতে পারে? এবং উক্ত সুষম ক্ষেত্রগুলির প্রত্যেকটির বাহু সংখ্যা কত?

108°, 120°, 135°, 147°, 157°, 177°

৬। কোন্ সুষম বহুভুজের একটি বহিঃকোণ অন্তঃকোণের দ্বিগুণ?

৭। কোন্ সুষম বহুভুজের অন্তঃকোণ বহিঃকোণের পাঁচগুণ?

৮। 36 বাহুবিশিষ্ট সুষম ভুজের একটি বহিঃকোণের পরিমাণ কত?

৯। কোন্ সুষম ক্ষেত্রের অন্তঃস্থ কোণ-সমষ্টি বহিঃস্থ কোণ-সমষ্টির চারগুণ?

১০। ABCD একটি চতুর্ভুজ। AO এবং BO ∠A ও ∠Bকে যথাক্রমে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়া O বিন্দুতে মিলিত হয়। প্রমাণ কর যে $\angle AOB = \frac{1}{2}(\angle C + \angle D)$।

১১। একটি ত্রিভুজের ভুমিসংলগ্ন কোণের অন্তরফল, শীর্ষকোণের সমদ্বিখণ্ডক রেখা ও ভুমির উপর লম্ব, এই দুই রেখার অন্তর্ভুত কোণের দ্বিগুণ হইবে।

১২। একটি ত্রিভুজের শীর্ষকোণ 70° এবং ইহার সমদ্বিখণ্ডক ও ভুমির উপর লম্বের অন্তর্ভুক্ত কোণের পরিমাণ 20°; ত্রিভুজের অপর দুইটি কোণের পরিমাণ কত?

১৩। প্রমাণ কর যে, একটি সুষম ষড়্ভুজের একটি কর্ণের সহিত ইহার একটি বাহু অথবা অপর একটি কর্ণ সমান্তরাল হইবে।

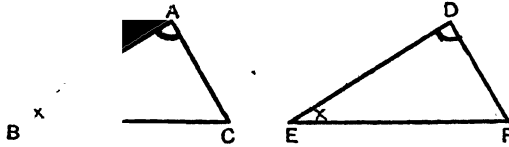
১৪। একটি সুষম পঞ্চভুজের বাহুগুলি উভয়দিকে বর্ধিত করিলে ইহাদের ছেদে যে তারকাবৎ চিত্রের উৎপত্তি হয় তাহাদের প্রত্যেকটি কোণ 36°।

১৫। একটি সমবাহু ত্রিভুজের বাহুগুলির সমত্রিখণ্ডক বিন্দুগুলি সরলরেখা দ্বারা যোগ করিয়া উহাদিগকে বর্ধিত করিলে যে তারকাকৃতি চিত্র উৎপন্ন হয় তাহার কোণগুলির পরিমাণ কত?

১৬। সমকোণী ত্রিভুজের একটি কোণ 30° হইলে ইহার ক্ষুদ্রতম বাহুটি বৃহত্তম বাহুর অর্ধেক হইবে।

উপপাদ্য ১৭ (Theorem 17)

যদি একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণ যথাক্রমে অপর একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণের সমান হয় এবং প্রথমটির একটি বাহু দ্বিতীয়টির অনুরূপ বাহুর সহিত সমান হয়, তবে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হইবে।

[If two triangles have two angles of the one respectively equal to two angles of the other and have the corresponding sides equal, then the triangles are congruent. *Euc*. 1. 26.]

চিত্র ৯৮

ABC ও DEF দুইটি ত্রিভুজের,

$\angle A = \angle D$

$\angle B = \angle E$

এবং BC = অনুরূপ বাহু EF।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম।

প্রমাণ। $\because \angle A + \angle B + \angle C = \angle D + \angle E + \angle F = 180°$

এবং $\angle A = \angle D$ ও $\angle B = \angle E$; $\therefore \angle C = \angle F$। (উপ. ১৬)

$\triangle ABC$ কে $\triangle DEF$ এর উপর এমন ভাবে স্থাপন কর যেন B বিন্দু E এর উপর এবং BC বাহু EF এর উপর পড়ে।

$\because$ BC = EF, $\therefore$ C বিন্দু F এর উপর পড়িবে।

আবার, $\because \angle B = \angle E$, $\therefore$ BA বাহু ED বাহুর উপর পড়িবে এবং $\because \angle C = \angle F$, $\therefore$ CA বাহু FD বাহুর উপর পড়িবে।

অতএব, BA ও CA বাহুর সাধারণ বিন্দু A, ED ও FD বাহুর সাধারণ বিন্দু D এর উপর পড়িবে।

$\therefore$ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম।

সুতরাং AB = DE, AC = DF এবং ত্রিভুজ দুইটির ক্ষেত্রফল সমান।

অনুশীলনী ২১

১। ABC ও DEF ত্রিভুজ দুইটির $\angle B=\angle E=57^\circ$, $\angle C=\angle F=43^\circ$ $AB=EF=3''$, ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হইবে কি না পরীক্ষা কর।

২। কোন সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমির মধ্যবিন্দু হইতে বাহুদ্বয়ের উপর দুইটি লম্ব টানিলে উহারা পরস্পর সমান হইবে।

৩। কোন সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমির প্রান্তবিন্দুদ্বয় হইতে বিপরীত বাহুদ্বয়ের উপর পতিত লম্বদ্বয় পরস্পর সমান।

৪। কোন সামান্তরিকের বিপরীত বাহুদ্বয় পরস্পর সমান।

৫। কোন কোণের দ্বিখণ্ডকরেখাস্থ যে কোন বিন্দু কোণের বাহুদ্বয় হইতে সমদূরবর্তী।

৬। কোন ত্রিভুজের শীর্ষকোণের সমদ্বিখণ্ডক রেখা ভূমিকে সমদ্বিখণ্ডিত করিলে ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু হইবে।

[If the bisector of the vertical angle of a triangle bisects the base, the trangle is isosceles.] (কঃ প্রঃ ১৯৩৭)

৭। দুইটি সর্বসম ত্রিভুজ একই ভূমির একই বা বিপরীত পার্শ্বে অঙ্কিত করিয়া তাহাদের শীর্ষবিন্দু যোগ কর। যে চিত্র হইবে তাহাতে সর্বসম ত্রিভুজ কোন্‌গুলি নির্দেশ কর।

৮। একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমিসংলগ্ন কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডক রেখা দুইটি বাহুদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ হইলে পরস্পর সমান হইবে। (কঃ প্রঃ ১৯২৯)

[The bisectors of the base angles of an isosceles triangle terminated by the sides are equal]

৯। ABC একটি সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজ, ইহার $\angle C$ সমকোণ। $\angle BAC$ কোণের সমদ্বিখণ্ডক BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর, $AC+CD=AB$।

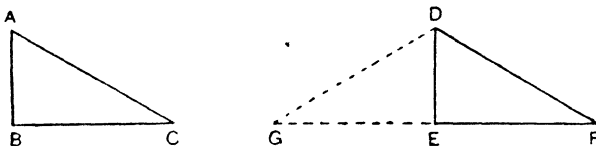
১০। কোন বৃত্তের কেন্দ্র হইতে যে কোন জ্যার উপর লম্বপাত করিলে জ্যাটি সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

১১। একটি ত্রিভুজের দুইটি মধ্যমা সমান হইলে ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু হইবে।

১২। ABCD একটি চতুর্ভুজ এবং ইহার কর্ণ AC $\angle A$ ও $\angle C$ এর সমদ্বিখণ্ডক। প্রমাণ কর যে AC অপর কর্ণ BDর উপর লম্ব।

উপপাদ্য ১৮ (Theorem 18)

একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও একটি বাহু যথাক্রমে অপর একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও আর একটি বাহুর সহিত সমান হইলে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হইবে।

[If two right-angled trangles have their hypotenuses equal and one side of the one equal to one side of the other, the triangles are congruent]

চিত্র ৯৯

ABC ও DEF দুইটি সমকোণী ত্রিভুজ ; ইহাদের

অতিভুজ AC = অতিভুজ DF

এবং AB = DE।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম।

প্রমাণ। △ABCকে △DEF এর উপর এরূপ ভাবে স্থাপন কর যেন A বিন্দু D বিন্দুর উপর ; AB বাহু DE বাহুর উপর ; এবং C বিন্দু DE র যে পার্শ্বে F বিন্দু আছে তাহার বিপরীত পার্শ্বে পড়ে।

∵ AB = DE, ∴ B বিন্দু E বিন্দুর উপর পড়িবে।

অতএব, DEG ত্রিভুজটি ABC ত্রিভুজের নূতন অবস্থান হইবে।

∴ ∠DEF = ∠ABC = ∠DEG = এক সমকোণ,

অতএব, GEF একই সরলরেখা। (উপ. ২)

এখন, DGF একটি ত্রিভুজ হইল, এবং ∵ DF = DG,

∴ ∠DFE = ∠DGE। (উপ. ৫)

এখন, DFE ও DGE ত্রিভুজদ্বয়ের

DF = DG (স্বীকার)

∠DFE = ∠DGE (প্রমাণিত)

এবং ∠DEF = ∠DEG ; (সমকোণ)

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। (উপ. ১৭)

∴ △DEF ≡ △DEG ≡ △ABC।

অনুশীলনী ২২

১। দুইটি ত্রিভুজের প্রত্যেকটির ছয়টি অঙ্গ—তিনটি বাহু ও তিনটি কোণ—ইহাদের মধ্যে কোন্ কোন্ তিনটি অঙ্গের পরিমাণ সমান হইলে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হইবে ?

২। কোন সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হইতে লম্ব টানিলে ইহা শীর্ষকোণ ও ভূমিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। (কঃ প্রঃ ১৯১৩)

৩। দুইটি পরস্পরচ্ছেদী সরলরেখা হইতে P বিন্দুর দূরত্ব সমান হইলে প্রমাণ কর যে, P বিন্দু উক্ত সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্ভূত একটি কোণের সমদ্বিখণ্ডক রেখার উপর থাকিবে।

৪। দুইটি ত্রিভুজের একটির দুইবাহু অপরটির দুই বাহুর সমান ; এবং তাহাদের যে কোন দুইটির সমান বাহুর সমদ্বিখণ্ডক মধ্যমাদ্বয় সমান ; প্রমাণ কর ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম।

৫। কোন বৃত্তের কেন্দ্র হইতে কোন জ্যার উপর পতিত লম্ব জ্যাকে সমান দুই ভাগে ভাগ করে।

৬। ABCD একটি চতুর্ভুজ ; ইহার AB = AD এবং ∠ = B∠D = সমকোণ ; AC ইহার একটি কর্ণ। প্রমাণ কর ΔABC ≡ ΔADC।

৭। যদি দুইটি ত্রিভুজের একটির দুইবাহু অপরটির দুইবাহুর সহিত পরস্পর সমান হয় কিন্তু উহাদের অন্তর্ভূত কোণ দুইটি অসমান হয় তবে যে ত্রিভুজের ঐ কোণটি বৃহত্তর তাহার তৃতীয় বাহুটিও বৃহত্তর হইবে।

[If two triangles have two sides of the one equal to two sides of the other, each to each, but the angle included by the two sides of one greater than the angle included by the corresponding sides of the other ; then the third side of that which has the greater angle is greater than the third side of the other. *Euc.* 1. 24.].

ABC ও $A'B'C'$ ত্রিভুজের $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ $\angle BAC > \angle B'A'C'$।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $BC > B'C'$।

চিত্র ১০০

অঙ্কন। $\angle BAC$ এর সহিত সমান করিয়া $B'A'D$ কোণ অঙ্কন কর।

প্রমাণ। যেহেতু $\angle B'A'D$, $\angle BA'C$ হইতে বৃহত্তর, সুতরাং $A'D$, $\angle B'A'C'$ এর বাহিরে পড়িবে। $A'D = AC$ লও ; $B'D$ যোগ কর। $\angle C'A'D$ কে সমদ্বিখণ্ডিত করিলে $A'H$ রেখা $B'D$ কে H বিন্দুতে ছেদ করিবে। $C'H$ যোগ কর। $\Delta A'C'H$ ও $A'DH$ সর্বসম (উপ. ৪) $\therefore$ $C'H = DH$; $\therefore$ $B'D = B'H + HC' > B'C'$।

কিন্তু, $\Delta ABC \equiv \Delta B'A'D$; $\therefore$ $BC > B'D$ $\therefore$ $BC > B'C'$।

৮। যদি একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহু অপর একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহুর সহিত পরস্পর সমান হয় এবং একটির তৃতীয় বাহু অপরটির তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর হয়, তবে প্রথমটির তৃতীয় বাহুর বিপরীত কোণ দ্বিতীয়টির অনুরূপ কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

[If two triangles have two sides of the one equal to two sides of the other, each to each ; but the third side of one greater than the third side of the other ; then the angle opposite to the greater side of the former is greater than the corresponding angle of the latter *Euc.* 1. 24].

ABC ও DEF দুইটি ত্রিভুজের $AB = DE$, $BC = EF$ এবং $CA > FD$; অতএব $\angle B > \angle E$ হইবে।

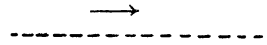
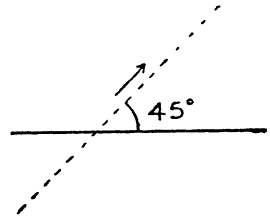
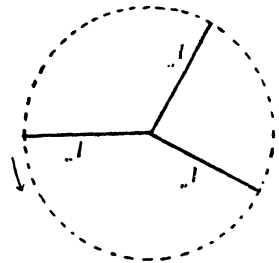
যদি $\angle B = \angle E$ হয়, তবে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হইবে ;

আবার, যদি $\angle B < \angle E$ হয়, তবে ৭. প্রশ্ন অনুযায়ী $CA < FD$ হইবে ; উভয়ই স্বীকার-বিরুদ্ধ। সুতরাং $\angle B > \angle E$।

সপ্তম অধ্যায়

বিন্দুর সঞ্চারপথ ও ত্রিভুজ অঙ্কন

৪৭। ইতঃপূর্বে আলোচনা করা হইয়াছে যে বিশেষ বিশেষ বিন্দুর, সরলরেখার ও বৃত্তের অবস্থান নির্দেশ করিয়াই সম্পাদ্যের সমাধান করিতে হয়, এবং কোন্ কোন্ বিশেষ অবস্থায় ইহাদের অবস্থান নির্ণয় করা যায়। বিন্দুর অবস্থান নির্ণয়ের আরও কয়েকটি প্রয়োজনীয় বিষয় আলোচনা করা যাইতেছে। সর্বত্র ধরিয়া লইতে হইবে যে, বিন্দু সর্বাবস্থায় এক সমতলেই অবস্থান করিবে।

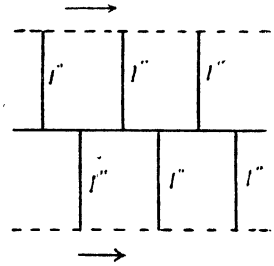
(১) একটি বিন্দু যদি একই দিকে চলিতে আরম্ভ করে তবে ইহা একটি সরলরেখার উপর অবস্থিত হইবে। (ইহাই সরলরেখার সংজ্ঞা)

(২) একটি বিন্দু যদি কোন নির্দিষ্ট সরলরেখার কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে একটি 45° কোণ করিয়া বরাবর চলিতে আরম্ভ করে, তবে ঐ বিন্দু ঐ সরলরেখার ঐ বিন্দুতে গঠিত উক্ত কোণের বাহুর উপর থাকিবে। বিন্দুটি যে সরল রেখায় থাকিবে তাহা নির্দিষ্ট রেখার সহিত 45° কোণে নত।

(৩) একটি বিন্দু যদি কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে সর্বদা $1''$ সমান দূরে অবস্থিত থাকিয়া চলিতে থাকে, তবে উহা একটি বৃত্তের উপর অবস্থান করিবে—যাহার কেন্দ্র, ঐ নির্দিষ্ট বিন্দু, এবং ব্যাসার্ধ $.1''$ পরিমাণ। ১০৩ চিত্রে অঙ্কিত বৃত্তটির পরিধিস্থ যে কোন স্থানে ঐ বিন্দুর সংস্থিতি হইতে পারে।

চিত্র ১০১

চিত্র ১০২

চিত্র ১০৩

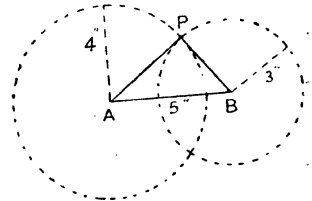
(৪) একটি বিন্দু যদি কোন নির্দিষ্ট সরলরেখা হইতে সর্বদা নির্দিষ্ট (1″) পরিমাণ দূরে থাকিয়া চলিতে আরম্ভ করে, তবে উহা ঐ সরলরেখার নির্দিষ্ট (1″) পরিমাণ দূরে অঙ্কিত সমান্তরাল সরল-রেখার উপর থাকিবে।

চিত্র ১০৪

১০৪ চিত্রে দেখান হইয়াছে যে, নির্দিষ্ট সরল-রেখার সমান্তরাল ঐরূপ দুইটি সরলরেখা উভয় পার্শ্বে অঙ্কিত হইবে।

৪৮। **সঞ্চারপথ** (Locus)। উক্ত কয়েকটি দৃষ্টান্ত হইতে দেখা যাইতেছে যে, প্রত্যেক ক্ষেত্রে বিন্দুটি কোন নির্দিষ্ট নিয়ম অনুসারে চলিতেছে, এবং নিয়মের তারতম্য অনুসারে কখনও সরলরেখায় কখনও বা বক্ররেখায় চলিতেছে।

কোন নির্দিষ্ট নিয়ম অনুসারে চলিলে একটি বিন্দু যে পথে চলে তাহাকে ইহার **সঞ্চারপথ** বলে।

৪৯। **সঞ্চারপথের ছেদ**। যদি কোন বিন্দু যুগপৎ দুইটি নিরপেক্ষ নিয়মের অধীন হয়, তবে তাহার অবস্থান সঞ্চারপথের ছেদ দ্বারা নির্ণীত হইবে।

দৃষ্টান্ত ১। A ও B দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দুর ব্যবধান 5″। এমন একটি বিন্দু P এর অবস্থান নির্ণয় করিতে হইবে যাহা A হইতে 4″ ও B হইতে 3″ দূরে অবস্থিত হইবে।

চিত্র ১০৫

এখানে P বিন্দু দুইটি নিরপেক্ষ নিয়মের অধীন—

(১) ইহা A হইতে 4″ দূরে থাকিবে, এবং (২) B হইতে 3″ দূরে থাকিবে।

প্রথম নিয়মে চলিলে, ইহা Aকে কেন্দ্র করিয়া এবং 4″ ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্তের উপর থাকিবে। দ্বিতীয় নিয়মে, ইহা B কে কেন্দ্র করিয়া ও 3″ ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্তের উপর থাকিবে।

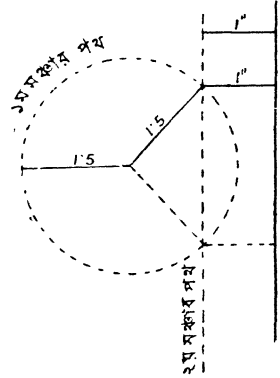
সুতরাং, এই দুইটি নিয়মের অধীন হওয়ায় P বিন্দুটিকে এই দুইটি বৃত্তের ছেদবিন্দুতে অবস্থিত হইতে হইবে।

বিশেষ দ্রষ্টব্য। যদি দুইটি নিয়ম এমন হয় যে উভয়ের নিয়মাধীনে চলিয়া সঞ্চারপথ দুইটি পরস্পর ছেদ করে না, তবে বিন্দুটি উভয় নিয়মের অধীন হইতে পারে না।

মন্তব্য। ইহা হইতে সুস্পষ্ট প্রতীয়মান হয় যে, কোন ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য দেওয়া থাকিলে এই প্রণালী দ্বারা ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে পারা যায়।

দৃষ্টান্ত ২। একটি স্থির বিন্দু ও একটি স্থির সরলরেখা আছে। একটি বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় করিতে হইবে যাহা স্থির বিন্দু হইতে 1·5″ ও স্থির রেখা হইতে 1″ দূরে থাকিবে।

এখানেও বিন্দুটি দুইটি নিরপেক্ষ নিয়মের অধীন ; যথা, ইহা

(১) নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে 1·5″ দূরে থাকিবে ও (২) নির্দিষ্ট রেখা হইতে 1″ দূরে থাকিবে। প্রথম সঞ্চারপথটি একটি 1·5″ ব্যাসার্ধের বৃত্তের পরিধি ; এবং দ্বিতীয় সঞ্চারপথটি স্থিররেখার সমান্তরাল একটি সরলরেখা, এবং উহা হইতে 1″ দূরবর্তী।

চিত্র ১০৬

১ম ও ২য় নিয়মের সঞ্চারপথ দুইটি, এবং বিন্দুর অবস্থান নির্ণায়ক ইহাদের ছেদবিন্দু দুইটি ১০৬ চিত্রে প্রদর্শিত হইল।

৫০। ত্রিভুজ অঙ্কন। ত্রিভুজ অঙ্কনের প্রধান কথা ইহার তিনটি কৌণিক বিন্দুর অবস্থান নির্ণয়। তিনটি কৌণিক বিন্দুর অবস্থান নির্দিষ্ট হইলে ইহাদিগকে সরলরেখা দ্বারা যোগ করিয়া ত্রিভুজটি অঙ্কিত করা যায়।

ইতঃপূর্বে দেখান হইয়াছে যে, একটি বিন্দুর অবস্থান স্থির করিতে হইলে ইহাকে দুইটি নিয়মের অধীন হইয়া চলিতে হয় ; সুতরাং, ত্রিভুজের তিনটি কৌণিক বিন্দুর অবস্থান স্থির করিতে হইলে দেখিতে হইবে প্রত্যেকটি বিন্দু পরস্পরের নিরপেক্ষ কি নিয়মে চলিতেছে, এবং ঐ নিয়মানুযায়ী অঙ্কিত সঞ্চারপথগুলির ছেদ হইতে ইহাদের অবস্থান সূচিত হইবে। অতএব, ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভব হইতে হইলে **তিনটি** বিষয় প্রদত্ত থাকা চাই।

ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় করিবার জন্য নিম্নলিখিত সঙ্কেত দুইটিও লক্ষ্য করিবার বিষয়—

(১) ত্রিভুজের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য দেওয়া থাকিলে. তৎপরিমাণ অঙ্কিত সরলরেখার দুই প্রান্তে নির্ণেয় ত্রিভুজের দুইটি কৌণিক বিন্দু থাকিবে।

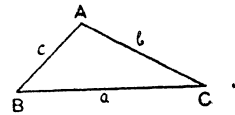
(২) যদি ত্রিভুজের একটি শিরঃকোণ দেওয়া থাকে, তবে তৎ-পরিমাণ একটি কোণ অঙ্কিত করিতে হইবে; এই অঙ্কিত কোণের শীর্ষবিন্দু, নির্ণেয় ত্রিভুজের একটি কৌণিক বিন্দু হইবে, এবং অপর দুইটি কৌণিক বিন্দু ইহার দুইটি বাহুর উপর থাকিবে।

৫১। ত্রিভুজের সর্বসমতা ও ইহার অঙ্কনের সম্ভাব্যতা

ত্রিভুজের ছয়টি অঙ্গ—তিনটি বাহু ও তিনটি কোণ। যথা

একটি ABC ত্রিভুজের—

তিনটি বাহু—a, b, c ও

তিনটি কোণ—A, B ও C।

চিত্র ১০৭

এখন দেখিতে হইবে, এই ছয়টি অঙ্গের কোন্ তিনটি নির্দিষ্ট থাকিলে নির্দিষ্ট ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভব হইবে। অঙ্গগুলির মধ্যে একটি বা দুইটি নির্দিষ্ট থাকিলে অসংখ্য ত্রিভুজ অঙ্কিত হইতে পারে; এক্ষেত্রে কোন নির্দিষ্ট ত্রিভুজ অসম্ভব, ইহা সুস্পষ্ট।

অঙ্গগুলি নিম্নলিখিত রূপে নির্দিষ্ট থাকিতে পারে—

(ক) তিনটি বাহু (a, b, c); (উপ. ৭)

(খ) দুইটি বাহু ও অন্তর্ভূত কোণ (b, A, c), (উপ, ৪)

(গ) দুইটি কোণ ও একটি অনুরূপ বাহু (B, a, A); (উপ, ১৭)

উপরিলিখিত অঙ্গগুলি প্রদত্ত থাকিলে ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভব হইবে। কারণ, ইহাতে প্রত্যেক ক্ষেত্রে ত্রিভুজগুলি সর্বসম হয়।

(ঘ) দুইটি বাহু ও একটি বিপরীত কোণ (b, c, B)

ইহাতে দুইটি ভিন্নজাতীয় ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভব হইবে—সুতরাং এই উপাত্ত দ্ব্যর্থবোধক (Ambiguous)। (সম্পাদ্য ৮ দ্রষ্টব্য)

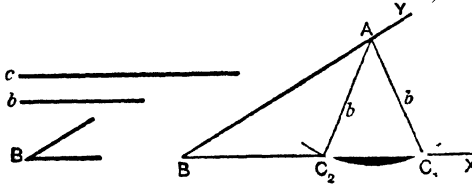
(ঙ) তিনটি কোণ (A, B, C);

ইহাতে অসংখ্য ত্রিভুজ অঙ্কিত হইতে পারে—কিন্তু, ইহারা সব সদৃশকোণী হইবে। কারণ, এই তিনটি নিয়ম নিরপেক্ষ নহে। (চিত্র ৫৩ দ্রষ্টব্য)

যে যে স্থলে ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভব সেই সেই স্থলে অঙ্কন প্রণালী প্রদর্শিত হইতেছে।

সম্পাদ্য ৮ (Problem 8)

একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহু ও তাহাদের কোন একটির বিপরীত কোণ দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

[Given two sides and the angle opposite to one of them, to construct the triangle.]

চিত্র ১১১

দুইটি বাহু b ও c এবং b এর বিপরীত $\angle B$ দেওয়া আছে।

অঙ্কন। BX একটি সরলরেখা লও ; B বিন্দুতে $\angle B$এর সহিত সমান করিয়া $\angle YBX$ অঙ্কিত কর। (সম্পাদ্য ৫)

BY হইতে c এর সমান BA অংশ কাটিয়া লও ; Aকে কেন্দ্র করিয়া b ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ অঙ্কিত কর ; মনে কর, এই চাপ BX কে C_1 ও C^2 এই দুই বিন্দুতে ছেদ করে। AC_1 ও AC_2 যোগ কর।

ABC_1 ও ABC_2 এই দুইটি ত্রিভুজই নির্ণেয় ত্রিভুজ হইবে ; কারণ, $BA = c$, $AC_1 = AC_2 = b$, এবং $\angle ABC = \angle B$।

দ্রষ্টব্য ১। ত্রিভুজের এই তিনটি অঙ্গ দ্বারা দুইটি ত্রিভুজ ABC_1 ও ABC_2 অঙ্কিত হইয়াছে। এই উপাত্ত দ্ব্যর্থবোধক (Ambiguous) ; কারণ, $\angle AC_1B$ ও $\angle AC_2B$ পরস্পর সম্পূরক।

২। (ক) যদি $b = c$ হয়, তবে C_2,Bএর সহিত মিশিয়া যাইবে, এবং মাত্র একটি ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভব হইবে ;

(খ) যদি $b > c$ হয়, তবে C_2 ও C_1, B বিন্দুর পরস্পর বিপরীত দিকে পড়িবে। এক্ষেত্রে ABC_2 ত্রিভুজটি গ্রাহ্য হইবে না, কারণ $\angle ABC_2 = \angle B$ হইবে না।

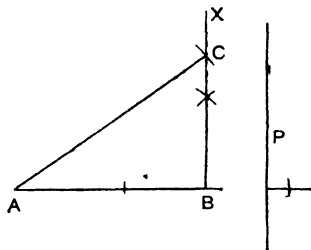
৩। (ক) যদি $b < c$ হয়, তবে দুইটি ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভব।

(খ) যদি $b < c$ এবং b, BX হইতে A বিন্দুর দূরত্বের সমান হয়, তবে C_1 ও C_2 এক সঙ্গে মিলিয়া যাইবে। এ ক্ষেত্রে একটি মাত্র ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভব হইবে।

(গ) যদি $b < c$ হয় এবং b, BX হইতে A বিন্দুর দূরত্ব অপেক্ষা ছোট হয়, তবে বৃত্তচাপটি BX কে ছেদ করিবে না ; সুতরাং, ত্রিভুজ অঙ্কন মোটেই সম্ভব হইবে না।

সম্পাদ্য ৯ (Problem 9)

একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও একটি বাহু দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

[Given the hypotenuse and a side of a right-angled triangle, to construct the triangle.]

চিত্র ১১২

প্রথম প্রণালী। ABC সমকোণী ত্রিভুজের একটি বাহু AB ও ইহার অতিভুজ P দেওয়া আছে; ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। ABর B প্রান্তে BX লম্ব অঙ্কিত কর। Aকে কেন্দ্র করিয়া P ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ অঙ্কিত কর; মনে কর, এই চাপ BX কে C বিন্দুতে ছেদ করিল। AC যোগ কর। ABC নির্ণেয় ত্রিভুজ হইবে।

প্রমাণ। AC = P (অঙ্কন) এবং $\angle ABC = 90^\circ$।

দ্বিতীয় প্রণালী। সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ AC এবং একটি বাহু P দেওয়া আছে; ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

ACকে O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর। Oকে কেন্দ্র করিয়া OA ব্যাসার্ধ লইয়া অর্ধবৃত্ত অঙ্কিত কর।

Aকে কেন্দ্র করিয়া P ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ আঁক; মনে কর, এই চাপ বৃত্তার্ধকে B বিন্দুতে ছেদ করে।

AB ও AC যেগ কর।

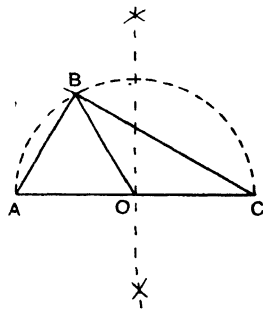
ABC নির্ণেয় ত্রিভুজ হইবে।

প্রমাণ। OB যোগ কর।

$\because$ OA = OB,

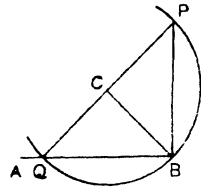
$\therefore \angle OAB = \angle OBA$;

$\because$ OB = OC,

$\therefore \angle OCB = \angle OBC$।

চিত্র ১১৩

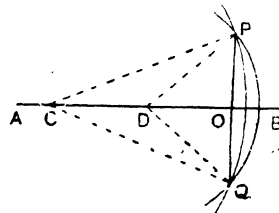
$$\therefore \quad \angle ABC = \angle OBA + \angle OBC$$
$$= \angle OAB + \angle OCB$$
$$= \tfrac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ \text{।} \qquad \text{(উপ. ১৬)}$$

দ্রষ্টব্য ১। দ্বিতীয় প্রণালী হইতে, কোন সরলরেখার এক প্রান্তবিন্দু হইতে ইহার উপর লম্ব টানিবার আর একটি সূত্র পাওয়া যায়।

AB একটি সরলরেখা। C একটি বহিঃস্থ বিন্দু লও। CB যোগ কর। Cকে কেন্দ্র করিয়া CB ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর; মনে কর, এই বৃত্ত AB কে Q বিন্দুতে ছেদ করে। QC যোগ কর, এবং QC বর্ধিত করিয়া বৃত্তকে P বিন্দুতে ছেদ কর। PB যোগ কর। তাহা হইলে PB, Bর উপর B বিন্দুতে লম্ব হইবে

চিত্র ১১৪

দ্রষ্টব্য ২। কোন বহিঃস্থ বিন্দু হইতে কোন সরলরেখার উপর লম্ব অঙ্কন অনুরূপ প্রণালীতে করা যাইতে পারে।

(ক) মনে কর, P, AB সরলরেখার বহিঃস্থ একটি বিন্দু। ABর উপর A এর সমীপবর্তী একটি বিন্দু Q লও; QP যোগ কর; QPকে C বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর; Cকে কেন্দ্র করিয়া CP ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর; ধর, এই বৃত্ত AB কে B বিন্দুতে ছেদ করে। তাহা হইলে PB, ABর উপর লম্ব হইবে। (চিত্র ১১৪)

(খ) AB সরলরেখার উপর C ও D দুইটি বিন্দু লও। C ও D কে কেন্দ্র করিয়া CP ও DP ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। ইহারা ABর যে পার্শ্বে P আছে তাহার বিপরীত পার্শ্বে Q বিন্দুতে ছেদ করিবে। PQ যোগ কর। ধর, PQ, AB কে O বিন্দুতে ছেদ করে। PO, ABর উপর লম্ব হইবে। (চিত্র ১১৫)

চিত্র ১১৫

৭ম ও ৪র্থ উপপাদ্য অনুযায়ী প্রমাণ কর।

অনুশীলনী ২৪

১। ABC ত্রিভুজগুলি অঙ্কিত কর এবং অসম্ভব স্থলে কারণ নির্দেশ কর।

(ক) $a=3{\cdot}9''$, $b=2{\cdot}5''$, $c=2{\cdot}5''$
(খ) $a=2''$, $b=2''$, $c=2''$
(গ) $a=5''$, $b=2''$, $c=3''$
(ঘ) $a=3{\cdot}5''$, $b=2{\cdot}7''$, $\angle C=45^\circ$
(ঙ) $a=3$ সেঃমিঃ $b=2{\cdot}4$সেঃমিঃ, $\angle C=135^\circ$
(চ) $a=3$সেঃমিঃ, $\angle B=60^\circ$ $\angle C=55^\circ$
(ছ) $a=2$সেঃমিঃ, $\angle B=105^\circ$, $\angle C=75^\circ$
(জ) $a=3''$, $b=3{\cdot}5''$, $\angle B=30^\circ$
(ঝ) $a=3$সেঃমিঃ, $b=2{\cdot}2$সেঃমিঃ, $\angle B=30^\circ$
(ঞ) $a=3''$, $b=1''$, $\angle B=30^\circ$

২। একটি সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কিত কর যাহার অতিভুজ ও অপর একটি বাহুর দৈর্ঘ্য :—

(ক) 13 সেঃমিঃ ও 9 সেঃমিঃ (খ) $2{\cdot}5''$ ও $1{\cdot}5''$

৩। একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত কর :—

(ক) যাহার ভূমিসংলগ্ন কোণদ্বয়ের যোগফল 60°।
(খ) যাহার ভূমি $4''$ ও শীর্ষ হইতে পাতিত লম্ব $5''$।
(গ) যাহার একটি বাহু $5''$ ও ভূমি $4''$।
(ঘ) যাহার শীর্ষকোণ ও শীর্ষবিন্দু হইতে ভূমির উপর লম্বের দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে।
(ঙ) যাহার শীর্ষকোণের পরিমাণ ও ভূমির দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে।

ইঙ্গিত। শীর্ষকোণের সহিত সমান একটি কোণ আঁকিয়া তাহাকে সমদ্বিখণ্ডিত কর। নির্ণেয় ত্রিভুজের একটি কৌণিক বিন্দু এই সমদ্বিখণ্ডক রেখা হইতে ভূমির দৈর্ঘ্যের অর্ধ দূরবর্তী হইবে।

(চ) যাহার বাহুদ্বয়ের সমষ্টি ও ভূমি দেওয়া আছে।

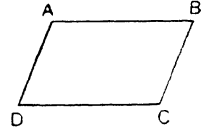
৪। একটি সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কিত কর, যাহার

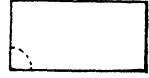
(ক) অতিভুজ ও তৎসংলগ্ন একটি কোণ দেওয়া আছে।
(খ) একটি বাহু ও তদ্বিপরীত একটি সূক্ষ্মকোণ দেওয়া আছে।
(গ) অতিভুজ ও সমকৌণিক বিন্দু হইতে ইহার দূরত্ব দেওয়া আছে।
(ঘ) একটি বাহু $=1{\cdot}5''$ ও সমকৌণিক বিন্দু হইতে অঙ্কিত মধ্যমা $=2''$।

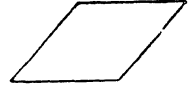
৫। $3''$, $4''$ ও $5''$ দীর্ঘ বাহুবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত কর। ইহার যে কোন দুইটি কোণের সমদ্বিখণ্ডক রেখা দুইটির ছেদবিন্দু হইতে কোন বাহুর দূরত্ব মাপিয়া বল। (ক. প্র. ১৯১৫)

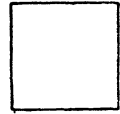
অষ্টম অধ্যায়

সামান্তরিক

৫২। **সংজ্ঞা**। যে চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলি সমান্তরাল তাহাকে **সামান্তরিক** (Parallelogram) বলে। ১১৬ চিত্রে ABCD একটি সামান্তরিক। ইহার বিপরীত বাহুদ্বয় AB ও CD, এবং AD ও BC সমান্তরাল।

চিত্র ১১৬

যে সামান্তরিকের কোণগুলি প্রত্যেকে সমকোণ তাহাকে **আয়তক্ষেত্র** (Rectangle) বলে। (১১৭ চিত্র)

চিত্র ১১৭

যে সামান্তরিকের বাহুগুলি পরস্পর সমান কিন্তু কোণগুলির একটিও সমকোণ নহে তাহাকে **রম্বস্** (Rhombus) বলে। (১১৮ চিত্র)

চিত্র ১১৮

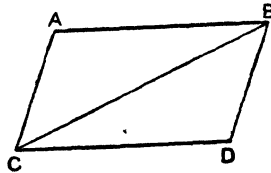
যে সামান্তরিকের বাহুগুলি পরস্পর সমান এবং কোণগুলির প্রত্যেকটি সমকোণ তাহাকে **বর্গক্ষেত্র** (Square) বলে। (১১৯ চিত্র)

চিত্র ১১৯

যে চতুর্ভুজের দুইটি বাহু সমান্তরাল, কিন্তু অপর দুইটি বাহু সমান্তরাল নহে তাহাকে **ট্রাপিজিয়ম** (Trapezium) বলে। (১২০ চিত্র)

চিত্র ১২০

উপপাদ্য ১৯ (Theorem 19)

কোন চতুর্ভুজের দুইটি বিপরীত বাহু সমান ও সমান্তরাল হইলে ইহার অপর দুইটি বিপরীত বাহুও সমান ও সমান্তরাল হইবে।

[If two opposite sides of a quadrilateral are equal and parallel, then its other two sides are also equal and parallel. *Euc.* 1, 33.]

চিত্র ১২১

ABDC একটি চতুর্ভুজ, ইহার AB ও CD বাহু দুইটি পরস্পর সমান ও সমান্তরাল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, ইহার AC ও BD বাহু দুইটিও সমান ও সমান্তরাল।

প্রমাণ। BC যোগ কর।

$\because$ AB $\parallel$ CD, $\therefore$ $\angle$ABC = $\angle$BCD (একান্তর)

এখন, ABC ও DCB এই ত্রিভুজদ্বয়ের

AB = CD (স্বীকার)

BC উভয়ের সাধারণ বাহু।

এবং অন্তর্ভূত $\angle$ABC = অন্তর্ভূত $\angle$DCB (প্রমাণিত)

$\therefore$ ত্রিভুজ দুইটি সর্ব্বসম। (উপ ৪)

$\therefore$ AC = BD,

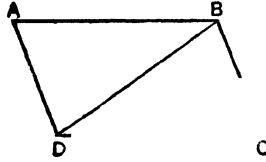
এবং $\angle$ACB = $\angle$DBC ;

যেহেতু, এই দুইটি কোণ একান্তর,

$\therefore$ AC $\parallel$ BD। (উপ ১৪)

উপপাদ্য ২০ (Theorem 20)

সামান্তরিকের (১) বিপরীত বাহুগুলি পরস্পর সমান, (২) বিপরীত কোণগুলি পরস্পর সমান, এবং (৩) প্রত্যেক কর্ণই সামান্তরিককে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

[The opposite sides and angles of a parallelogram are equal and each diagonal bisects the parallelogram. *Euc.* 1. 34]

চিত্র ১২২

ABCD একটি সামান্তরিক ; এবং BD একটি কর্ণ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

(১) AB = CD ; এবং AD = BC ;

(২) $\angle$ABC = $\angle$ADC, এবং $\angle$BAD = $\angle$BCD ;

(৩) $\triangle$ABD ও $\triangle$BCDর ক্ষেত্রফল পরস্পর সমান।

প্রমাণ। যেহেতু AB ∥ CD এবং BD ইহাদের ছেদক,

∴ $\angle$ABD = একান্তর $\angle$CDB।

এবং যেহেতু AD ∥ BC, এবং DB ইহাদের ছেদক,

∴ $\angle$ADB = একান্তর $\angle$CBD।

এখন, ABD ও CDB ত্রিভুজদ্বয়ের

$\angle$ABD = $\angle$CDB (প্রমাণিত)

$\angle$ADB = $\angle$CBD

এবং BD উভয়ের সাধারণ বাহু;

∴ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম। (উপ, ১৭)

∴ (১) AB = CD, এবং AD = BC ;

(২) $\angle$BAD = $\angle$BCD ;

(৩) $\triangle$ABD ও $\triangle$BCD উভয়ের ক্ষেত্রফল সমান হওয়ায় কর্ণ BD সামান্তরিককে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

পুনশ্চ ∵ $\angle ABD = \angle CDB$ এবং $\angle CBD = \angle ADB$,

∴ সমগ্র $\angle ABC =$ সমগ্র $\angle ADC$ ।

এইরূপে AC যোগ করিয়া প্রমাণ করা যায় যে AC সামান্তরিককে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে।

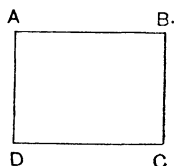
অনুসিদ্ধান্ত ১। সামান্তরিকের একটি কোণ সমকোণ হইলে ইহার সকল কোণই সমকোণ হইবে। (আয়তক্ষেত্রের সকল কোণই সমকোণ)

ABCD একটি সামান্তরিক। দেওয়া আছে যে, ইহার $\angle A =$ এক সমকোণ ।

∵ AB ॥ DC, ∴ $\angle A + \angle D = 2$ সমকোণ ;

কিন্তু $\angle A =$ সমকোণ, ∴ $\angle D = 1$ সমকোণ ;

আবার, $\angle A = \angle C$ এবং $\angle D = \angle B$;

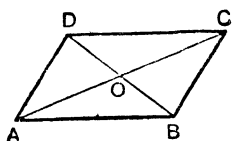
∴ $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 1$ সমকোণ।

চিত্র ১২৩

অনুসিদ্ধান্ত ২। বর্গক্ষেত্রের সকল বাহুই সমান ও সকল কোণই সমকোণ।

অনুসিদ্ধান্ত ৩। সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

[The diagonals of a parallelogram bisect one another.]

ABCD সামান্তরিকের দুইটি কর্ণ AC ও BD, O বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, AO = CO এবং BO = DO।

চিত্র ১২৪

∴ AOB ও COD এই দুইটি ত্রিভুজের

$\angle OAB = \angle OCD$ (একান্তর)

$\angle OBA = \angle ODC$ („)

এবং AB = CD :

∴ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম। ∴ AO = CO, BO = DO ।

অনুসিদ্ধান্ত ৩ (ক)। একটি রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পর লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত হয়। (কঃ প্রঃ ১৯২২)

[The diagonals of a rhombus bisect each other at right angles.]

৫৩। নিম্ন প্রশ্নগুলি অতি সহজেই সমাধান করা যাইতে পারে :—

(১) কোন চতুর্ভুজের চারিটি বাহুর বিপরীত বাহুযুগল যদি পরস্পর সমান হয় তবে তাহা সামান্তরিক হইবে।

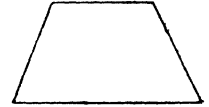
(২) চতুর্ভুজের চারিটি কোণের বিপরীত কোণগুলি পরস্পর সমান হইলে ইহা সামান্তরিক হইবে।

(৩) আয়তক্ষেত্রের ও বর্গক্ষেত্রের কর্ণদ্বয় পরস্পর সমান।

(৪) চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় পরস্পর সমদ্বিখণ্ডিত হইলে ইহা সামান্তরিক হইবে।

(৫) চতুর্ভুজের একটি কর্ণ ইহাকে দুইটি সর্বসম ত্রিভুজে বিভক্ত করিলে ইহা সামান্তরিক হইবে কি ?

(৬) সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়মের ভূমিস্থ কোণদ্বয় পরস্পর সমান।

সংজ্ঞা। যে ট্রাপিজিয়মের অসমান্তরাল বাহু দুইটি সমান তাহাকে **সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়ম** বলে। (Isosceles Trapezium)

চিত্র ১২৫

অনুশীলনী ২৫

১। ABCD একটি চতুর্ভুজ। ইহার $AB = CD = 4''$, এবং $BC = DA = 3''$; প্রমাণ কর ABCD একটি সামান্তরিক।

২। ABCD সামান্তরিকের $\angle A = 135^\circ$, অন্য কোণগুলি কত ?

৩। AB একটি সীমাবদ্ধ সরল সরলরেখা। BD ও AC ইহার উপর বিপরীত পার্শ্বে অঙ্কিত লম্ব, এবং $BD = AC = 2''$; যদি $AD = 4''$ হয়, তবে $BC =$ কত ইঞ্চি ?

৪। ABCD একটি চতুর্ভুজ। ইহার কর্ণদ্বয় P বিন্দুতে ছেদ করে। যদি $PA = CP = 3''$ হয় এবং $BP = DP = 4''$ হয়, প্রমাণ কর ABCD একটি সামান্তরিক।

৫। ABCD একটি চতুর্ভুজ, ইহার $AB \parallel CD$; $AB = CD = 3''$ এবং $\angle A = 105^\circ$। $\angle C =$ কত ডিগ্রি ?

৬। ABCD একটি সামান্তরিক। P ও Q যথাক্রমে AB ও CDর মধ্যবিন্দু। AQ, BQ, DP ও CP যোগ কর। যে চিত্র হইল তাহাতে কতগুলি সামান্তরিক উৎপন্ন হইয়াছে তাহা নির্দেশ কর।

৭। কোন সামান্তরিকের বাহুগুলির মধ্যবিন্দু একান্তর ভাবে যোগ করিলে যে চতুর্ভুজগুলি উৎপন্ন হইবে তাহারা প্রত্যেকে এক একটি সামান্তরিক।

৮। সামান্তরিকের সন্নিহিত কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডক সরলরেখা দুইটি পরস্পর সমকোণে নত।

৯। সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়মের বিপরীত কোণদ্বয় সম্পূরক হইবে।

১০। সামান্তরিকের কর্ণদ্বয়ের ছেদ বিন্দু ভেদ করিয়া অঙ্কিত যে কোন রেখা ইহার বিপরীত বাহুদ্বারা সীমাবদ্ধ হইলে উক্ত রেখা উক্ত বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইবে।

[Any straight line drawn through the point of intersection of the diagonals of a parallelogram and terminated by its opposite sides is bisected at the point]

১১। একটি সামান্তরিকের কোণগুলির সমদ্বিখণ্ডক রেখা চারিটি দ্বারা উৎপন্ন চতুর্ভুজটি একটি আয়তক্ষেত্র হইবে।

১২। ABCD ও ABEF দুইটি সামান্তরিক একই ভূমি ABর উপর অঙ্কিত। প্রমাণ কর যে, CDEF চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক।

১৩। ABCD একটি সামান্তরিক; E, F, H, K যথাক্রমে AB, BC, CD, DAএর উপর এরূপ চারিটি বিন্দু যে AK = FC, এবং AE = CH। প্রমাণ কর EFHKও একটি সামান্তরিক।

১৪। নিম্ন ক্ষেত্রগুলির কোন কোনটির কর্ণদ্বয় (১) পরস্পর সমান এবং (২) পরস্পর লম্ব দ্বিখণ্ডিত; সামান্তরিক, আয়ত, বর্গক্ষেত্র, রম্বস. ট্রাপিজিয়ম, ও সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়ম।

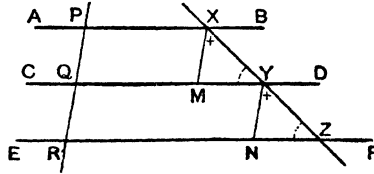
১৫। BAC কোণের মধ্যবর্তী D একটি বিন্দু। এরূপ একটি সরলরেখা BDC অঙ্কন কর যেন BD = DC হয়।

১৬। কোন সামান্তরিকের কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু হইতে যে কোন সরলরেখা টানিলে উহা সামন্তরিকটিকে দুইটি সমান খণ্ডে বিভক্ত করে।

১৭। ABCD একটি সামান্তরিক। ABকে E বিন্দু ও CDকে F বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করা হইল। যদি BE = DF হয়, তবে BD EFকে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে।

উপপাদ্য ২১ (Theorem 21)

তিন বা ততোধিক সমান্তরাল সরলরেখা কোন ভেদককে সমান সমান অংশে ছিন্ন করিলে উহারা অপর যে কোন ভেদককেও সমান সমান অংশে ছিন্ন করিবে।

[If three or more parallel straight lines make equal intercepts on a transversal, they make equal intercepts on any other tranversal.]

চিত্র ১২৬

AB, CD, EF তিনটি সমান্তরাল সরলরেখা PQR ভেদককে PQ, QR এই দুই সমান অংশে ছিন্ন করিয়াছে।

মনে কর, ইহারা অপর কোন একটি ভেদক XYZকে XY ও YZ অংশে ছিন্ন করে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে $XY = YZ$

অঙ্কন। X ও Y হইতে XM ও YN দুইটি সরলরেখা PQR রেখার সহিত সমান্তরাল করিয়া টান। মনে কর, এই দুইটি রেখা যথাক্রমে CDকে M বিন্দুতে এবং EFকে N বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ। $\because$ $CD \parallel EF$ এবং XYZ ইহাদের ভেদক,

$\therefore$ $\angle XYM = \angle YZN$।

এবং $\because$ XM ও YN উভয়েই PQR এর সমান্তরাল;

$\therefore$ $XM \parallel YN$; $\therefore$ $\angle MXY = \angle NYZ$।

পুনশ্চ $\because$ PXMQ ও QYNR উভয়েই সামান্তরিক,

এবং $PQ = QR$, $\therefore$ $XM = YN$।

এখন XMY ও YNZ ত্রিভুজদ্বয়ের

$\angle MXY = \angle NYZ$; $\angle XYM = \angle YZN$

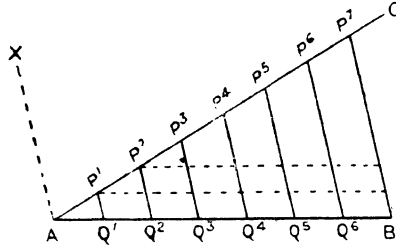
এবং $XM = YN$;

$\therefore$ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম। (উপ. ১৭)

$\therefore$ $XY = YZ$।

সম্পাদ্য ৯ (Problem 9)

একটি সীমাবদ্ধ সরলরেখাকে কতিপয় সমান অংশে বিভক্ত করিতে হইবে।

[To divide a straight line into several equal parts.]

চিত্র ১২৮

AB একটি সীমাবদ্ধ সরলরেখা ; মনে কর, ইহাকে সাতটি সমান অংশে বিভক্ত করিতে হইবে।

অঙ্কন। A বিন্দুতে ABর সহিত $\angle BAC$ অঙ্কিত কর।

AC হইতে AP^1, P^1P^2, P^2P^3, P^3P^4, P^4P^5, P^5P^6 এবং P^6P^7 এই সমান সাতটি অংশ কাটিয়া লও। P^7B যোগ কর। P^1, P^2, P^3, বিন্দুগুলিতে P^1Q^1, P^2Q^2, P^3Q^3 প্রভৃতি সরলরেখা P^7Bর সমান্তরাল করিয়া টান; মনে কর এই রেখাগুলি ABকে Q^1, Q^2, $Q^3\cdots$ প্রভৃতি বিন্দুতে ছেদ করে। তাহা হইলে AB সরলরেখা Q^1, Q^2, Q^3 প্রভৃতি বিন্দুতে সাতটি সমান অংশে বিভক্ত হইবে।

প্রমাণ। BP^7এর সমান্তরাল AX রেখা টান।

$AX, Q^1P^1, Q^2P^2, \cdots BP^7$ প্রভৃতি সমান্তরাল রেখার ভেদক ও AB দুইটি সরলরেখা।

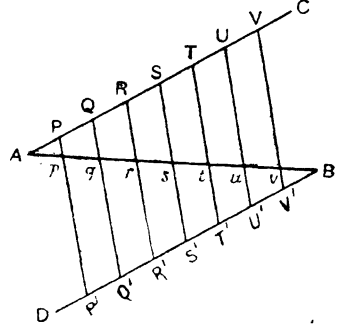
$\because \quad AP^1 = P^1P^2 = P^2P^3 \cdots = P^6P^7$, (অঙ্কন)

$\therefore \quad AQ^1 = Q^1Q^2 = Q^2Q^3 \cdots = Q^6B$। (উপ. ২১)

দ্রষ্টব্য। $AQ^1 = \frac{1}{7}AB$, $AQ^2 = \frac{2}{7}AB$, $AQ^3 = \frac{3}{7}AB$ ইত্যাদি।

এই প্রণালী দ্বারা সীমাবদ্ধ সরলরেখা হইতে ইহার যে কোন ভগ্নাংশ কাটিয়া লওয়া যায়।

দ্বিতীয় প্রণালী। A ও B বিন্দুতে যে কোন দুইটি সমান্তরাল রেখা AC ও BD টান। AC হইতে AP, PQ, QR,⋯UV সাতটি সমান অংশ কাটিয়া লও। BD হইতেও APর সমান BV′, V′U′, U′T′, প্রভৃতি সাতটি সমান অংশ কাটিয়া লও। PP′, QQ′ ইত্যাদি ক্রমে যোগ কর। তাহা হইলে, এই রেখাগুলি দ্বারা AB সাতটি সমান অংশে বিভক্ত হইবে।

চিত্র ১২৮

অনুশীলনী ২৬

১। 3·5 ইঞ্চি দীর্ঘ সরলরেখাকে সমান চারিভাগে বিভক্ত কর।

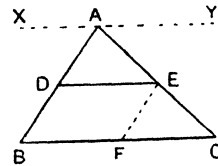
২। কোন সরলরেখা হইতে ইহার $\frac{1}{5}$ ও $\frac{3}{5}$ অংশের সমান দুইটি সরলরেখা অঙ্কিত কর।

৩। 5, 8 ও 10 সেণ্টিমিটার দীর্ঘ বাহুবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত কর; এই বাহুগুলির $\frac{1}{6}$ অংশ লইয়া আর একটি ত্রিভুজ আঁক। এই ত্রিভুজ দুইটির কোণগুলি মাপিয়া পরীক্ষা কর ইহারা সদৃশকোণী কি না।

অনুশীলনী ২৭

১। কোন ত্রিভুজের একটি বাহুর মধ্যবিন্দু হইতে আর একটি বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা টানিলে এই সরলরেখা ত্রিভুজের তৃতীয় বাহুটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে। (কঃ প্রঃ ১৯২৩)

[The straight line drawn through the middle point of one side of a triangle parallel to another side bisects the third side.]

ABC একটি ত্রিভুজ। AB বাহুর মধ্যবিন্দু D। DE সরলরেখা BC বাহুর সমান্তরাল। প্রমাণ করিতে হইবে যে, DE, AC বাহুকে E বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করে, অর্থাৎ, AE = CE।

চিত্র ১২৯

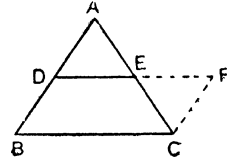
প্রথম প্রণালী। মনে কর, XAY সরলরেখা BCর সমান্তরাল করিয়া টানা হইল। তাহা হইলে, XAY ∥ DE। AB ও AC এই দুইটি রেখা, XAY, DE ও BC এই তিনটি সমান্তরাল সরলরেখার ভেদক। যেহেতু, AD = BD, ∴ AE = EC। (উপ.২১)

দ্বিতীয় প্রণালী। ABর সহিত সমান্তরাল EF টান, এবং মনে কর, EF, BCকে F বিন্দুতে ছেদ করে। ∵ DE ∥ BF, এবং EF ∥ DB ; অতএব DEFB সামান্তরিক। ∴ DB = EF। এইবার AED ও EFC এই দুইটি ত্রিভুজ সর্বসম সহজেই প্রমাণ করা যায়। ইহাতে AE = EC প্রমাণ হয়।

২। কোন ত্রিভুজের দুইটি বাহুর মধ্যবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখা তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল ও অর্ধেক। (কঃ প্রঃ ১৯১৭)

[The straight line which joins the middle points of two sides of a triangle and is terminated by them is parallel to, and half of the third side.]

ABC একটি ত্রিভুজ, D ও E যথাক্রমে AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু। DE যোগ কর। প্রমাণ করিতে হইবে যে,

DE ∥ BC এবং DE = $\frac{1}{2}$BC।

DE বাহুকে F পর্যন্ত বর্ধিত কর যেন EF = DE হয়। CF যোগ কর। △AED ও △CEF সর্বসম হইবে (উপ.৪)। তাহা হইলে,

চিত্র ১৩০

AD = CF এবং ∠DAE = ∠FCE হইবে। কিন্তু ইহারা একান্তর কোণ ; অতএব AB ∥ CF। আবার, FC = AD = BD ; ∴ DFCB সামান্তরিক। ∴ DF ∥ BC এবং = BC। ∴ DE = $\frac{1}{2}$DF = $\frac{1}{2}$BC।

৩। একটি সমকোণী ত্রিভুজের সমকৌণিক বিন্দু হইতে অঙ্কিত মধ্যমা অতিভুজের অর্ধেক হইবে। (কঃ প্রঃ ১৯১৯)

৪। ত্রিভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দু যোগ করিলে চারিটি সামান্তরিক এবং চারিটি সর্বসম ত্রিভুজের উৎপত্তি হয়।

৫। ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হইতে ভূমি পর্যন্ত অঙ্কিত যে কোন সরলরেখা ত্রিভুজের বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু-সংযোজক সরলরেখা দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

৬। কোন চতুর্ভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দু পর্যায়ক্রমে যোগ করিলে একটি সামান্তরিক অঙ্কিত হয় এবং ইহাদের একান্তর ভাবে সংযোজক সরলরেখা দুইটি পরস্পর সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

৭। ABCD একটি সামান্তরিক। X ও Y যথাক্রমে AD ও BCর মধ্যবিন্দু। প্রমাণ কর যে AY ও CX, BDকে সমান তিন ভাগে বিভক্ত করে।

৮। AB একটি সরলরেখা এবং X ইহার মধ্যবিন্দু। PQ অপর একটি সরলরেখা। A, C ও B হইতে AL, CM ও BN যথাক্রমে PQ রেখার উপর লম্ব। প্রমাণ কর যে $CM = \frac{1}{2}(AL \pm BN)$।

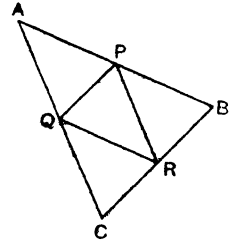
৯। একটি ট্রাপিজিয়মের অসমান্তরাল বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু সংযোজক সরলরেখা সমান্তরাল বাহু দুইটির সমান্তরাল হইবে ও ইহাদের সমষ্টির অর্ধেক হইবে, এবং ইহা প্রত্যেক কর্ণকে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে।

১০। যে কোন ABC ত্রিভুজের AB এবং AC বাহুদ্বয়, যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে, এবং R ও S বিন্দুতে ত্রিখণ্ডিত হইয়াছে। প্রমাণ কর (ক) $PR = \frac{1}{3}BC$, (খ) $QS = \frac{2}{3}BC$।

১১। একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমিস্থ যে কোন বিন্দু হইতে বাহুদ্বয়ের উপর পাতিত লম্বদ্বয়ের সমষ্টি, ভূমিপ্রান্ত হইতে বিপরীত বাহুর উপর পাতিত লম্বের সহিত সমান হইবে।

১২। সমবাহু ত্রিভুজের অন্তরস্থিত যে কোন বিন্দুর তিনটি বাহু হইতে দূরত্বের সমষ্টি ত্রিভুজের উচ্চতার সহিত সমান হইবে ; অতএব এই সমষ্টি ধ্রুবক (constant)। বিন্দুটি ত্রিভুজের বহিঃস্থ হইলে কিরূপ হইবে ?

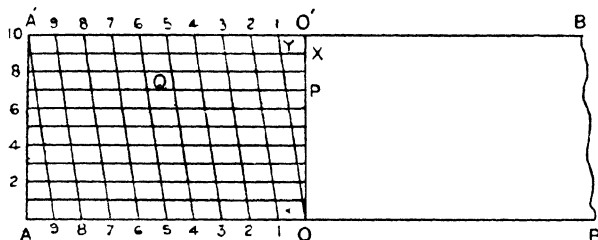
১৩। একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহুর মধ্যবিন্দুর অবস্থান প্রদত্ত আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে। [To construct a triangle having given the mid-points of their sides.]

অঙ্কন। P, Q ও R নির্ণেয় ত্রিভুজের তিনটি বাহুর মধ্যবিন্দুর অবস্থান। PQ, QR ও RP যোগ কর। P,Q ও R এর মধ্য দিয়া যথাক্রমে QR, RP ও PQ এর সমান্তরাল তিনটি রেখা অঙ্কিত কর। মনে কর, এই রেখা তিনটি A, B ও C বিন্দুতে ছেদ করে। ΔABC নির্ণেয় ত্রিভুজ হইবে।

চিত্র ১৩১

১৪। ABC ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দু A, AB ও BCর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Qএর অবস্থান নির্দিষ্ট আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

৫৪। কর্ণ মাপনী (The Diagonal Scale)

সাধারণ মাপনী দ্বারা এক ইঞ্চির যে কোন দশমাংশ মাপা যাইতে পারে ; কিন্তু, কর্ণ মাপনী দ্বারা এক ইঞ্চির কোন শতাংশ পর্যন্ত মাপা যায়।

(ক) কর্ণ মাপনী প্রস্তুত করিবার নিয়ম।

চিত্র ১৩২

AB একটি সরলরেখা হইতে AO = এক ইঞ্চি কাটিয়া লও ; এবং ইহার সহিত সমান্তরাল এবং পরস্পর সমান দূরে অবস্থিত দশটি সরলরেখা টান। দশম সরলরেখা A′O′ এর উপর, A ও O বিন্দু হইতে যথাক্রমে AA′ ও OO′ লম্ব টান। OAকে 1, 2, 3, 4, ইত্যাদি চিহ্ন দ্বারা সমান দশ অংশে বিভক্ত কর এবং O′A′কেও অনুরূপ চিহ্ন দ্বারা সমান দশ অংশে বিভক্ত কর। তারপর, O1,12, 23......9A′ ইত্যাদি তির্যক্‌ভাবে যোগ করিলে কর্ণ মাপনী প্রস্তুত হইবে।

O1O′ এই ত্রিভুজের $O'1 = \frac{1}{10}''$; $XY = \frac{9}{10} \times O'1 = \frac{9}{100} = {\cdot}09''$।

এইরূপ রেখাগুলির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে ·08″, ·06″, ·05″, ·04″, ·03″, ·02″, ·01″।

(খ) কর্ণ মাপনীর ব্যবহার প্রণালী।

মনে কর, 1·67″ দীর্ঘ একটি সরলরেখা আঁকিতে হইবে। ডিভাইডার দ্বারা মাপনী হইতে 1″ মাপিয়া কোন সরলরেখা AB হইতে 1″ কাটিয়া লও। কর্ণ মাপনীর OO′ রেখার সপ্তম ভাগ P বিন্দুতে ডিভাইডারের একটি পা রাখ এবং অন্য পা OA এর সমান্তরাল ভাবে 6 চিহ্নিত বিন্দু দিয়া অঙ্কিত কর্ণের ছেদ-বিন্দু পর্যন্ত বিস্তৃত কর। PQ = ·67″ হইবে। এইবার পূর্বে অঙ্কিত সরলরেখার B বিন্দু হইতে ডিভাইডার দ্বারা ·67″ অংশ কাটিয়া লও। এই প্রকারে 1·67″ অংশ কাটিয়া লওয়া হইল।

সুতরাং, কর্ণ মাপনী ব্যবহার দ্বারা এক ইঞ্চির যে কোন শতাংশ মাপা যায়।

দ্রষ্টব্য। OAকে ১৬ ভাগে বিভক্ত করিয়া যে কর্ণ মাপনী প্রস্তুত করা যায় তাহা দ্বারা ১ ইঞ্চির ১/১৬০ অংশ পর্যন্ত মাপা যাইতে পারে।

নবম অধ্যায়

চতুর্ভুজ অঙ্কন

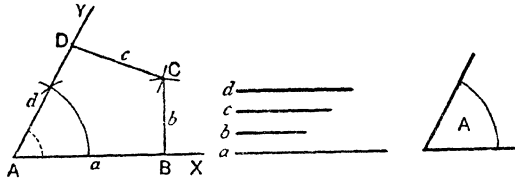
৫৫। ইতঃপূর্বে বলা হইয়াছে যে একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে তিনটি স্বতন্ত্র উপাত্ত থাকা চাই। চতুর্ভুজ অঙ্কনে পাঁচটি স্বতন্ত্র উপাত্তের প্রয়োজন।

৫৬। **চতুর্ভুজ অঙ্কনের পূর্ব প্রক্রিয়া**

যে যে উপাত্ত দেওয়া থাকিবে তাহার দ্বারা নির্দিষ্ট চতুর্ভুজের স্থূল বা খসড়া চিত্র অঙ্কন করিয়া ইহার চারিটি শীর্ষবিন্দুর অবস্থান সাধারণতঃ সঞ্চারপথ অঙ্কিত করিয়া স্থির করিতে হয়।

সম্পাদ্য ১০ (Problem 10)

একটি চতুর্ভুজের বাহুগুলির দৈর্ঘ্য ও একটি কোণের পরিমাণ দেওয়া আছে ; চতুর্ভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To construct a quadrilateral having given its four sides and an angle.]

চিত্র ১৩৩

একটি চতুর্ভুজের চারিটি বাহুর দৈর্ঘ্য a, b, c ও d, এবং a ও d এর অন্তর্ভূত কোণ A দেওয়া আছে।

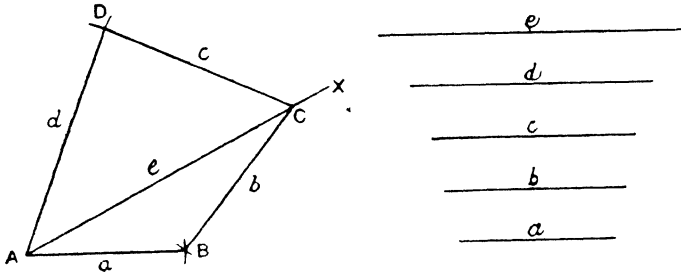
[বিশ্লেষণ। মনে কর, ABC নির্ণেয় চতুর্ভুজ, ইহার AB $=a$, BC $=b$, CD $=c$ এবং DA $=d$, $\angle$BAD $=\angle$A। $\angle$XAY অঙ্কিত করিলে শীর্ষ A পাওয়া যাইবে, এবং B ও D শীর্ষ যথাক্রমে AX ও AYএর উপর থাকিবে। B বিন্দু A হইতে a একক দূরে, এবং D বিন্দু A হইতে d একক দূরে ; সুতরাং, B ও D বিন্দুর অবস্থান স্থির করা যাইতে পারে। এইবার C বিন্দু D হইতে c একক এবং B হইতে b একক দূরে অবস্থিত ; সুতরাং C বিন্দুর অবস্থানও নির্ণয় করা যাইতে পারে।]

অঙ্কন। $\angle$Aএর সমান করিয়া $\angle$XAY আঁক (উপ. ৫)। AX হইতে AB $=a$ একক এবং AY হইতে AD $=d$ একক অংশ কাটিয়া লও। B ও D কে কেন্দ্র করিয়া যথাক্রমে b ও c একক ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি চাপ অঙ্কিত কর ; মনে কর ইহারা C বিন্দুতে ছেদ করে। CD ও CB যোগ কর।

ABCD নির্ণেয় চতুর্ভুজ হইল ; কারণ, ইহার বাহুগুলি এবং $\angle$A, উপাত্ত অনুযায়ী সমান করিয়া অঙ্কিত হইয়াছে।

সম্পাদ্য ১১ (Problem 11)

একটি চতুর্ভুজের চারিটি বাহু ও একটি কর্ণ প্রদত্ত আছে ; চতুর্ভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To construct a quadrilateral having given its four sides and a diagonal.]

চিত্র ১৩৪

চতুর্ভুজের চারিটি বাহু a, b, c, d, এবং একটি কর্ণ e একক দেওয়া আছে। চতুর্ভুজটি আঁকিতে হইবে।

অঙ্কন। যে কোন একটি সরলরেখা AX অঙ্কিত কর এবং ইহা হইতে AC = e একক কাটিয়া লও।

A কে কেন্দ্র করিয়া a একক ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ অঙ্কিত কর ; এবং C কে কেন্দ্র করিয়া b একক ব্যাসার্ধ লইয়া আর একটি বৃত্তচাপ অঙ্কিত কর ; মনে কর, এই দুই চাপ B বিন্দুতে ছেদ করে।

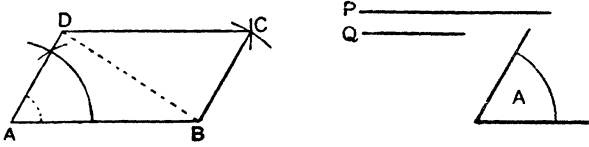
পুনরায়, A ও C কে কেন্দ্র করিয়া যথাক্রমে d ও c একক ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি চাপ অঙ্কিত কর ; মনে কর, এই দুই চাপ D বিন্দুতে ছেদ করে।

AB, BC, CD ও DA যোগ কর।

ABCD চতুর্ভুজটি নির্ণেয় চতুর্ভুজ হইবে ; কারণ, অঙ্কন অনুসারে ইহার AB = a, BC = b, CD = c, DA = d এবং AC = e একক।

সম্পাদ্য ১২ (Problem 12)

দুইটি সন্নিহিত বাহু ও তাহাদের অন্তর্ভূত কোণ দেওয়া আছে; একটি সামান্তরিক অঙ্কিত করিতে হইবে।

[Given two adjacent sides and the included angle, to construct a parallelogram.]

চিত্র ১৩৫

একটি সামান্তরিকের P ও Q দুইটি সন্নিহিত বাহু ও ইহাদের অন্তর্ভূত কোণ ∠A দেওয়া আছে। সামান্তরিকটি অঙ্কন করিতে হইবে।

অঙ্কন। P এর সহিত সমান দীর্ঘ AB সরলরেখা অঙ্কিত কর। AB রেখার A বিন্দুতে ∠A এর সমান ∠BAD অঙ্কিত কর। (সম্পাদ্য. ৫)। AD হইতে Q এর সমান দীর্ঘ AD কাটিয়া লও।

B ও D কে কেন্দ্র করিয়া যথাক্রমে Q ও P ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি বৃত্তচাপ অঙ্কিত কর; মনে কর, ইহারা C বিন্দুতে ছেদ করে। BC ও DC যোগ কর।

ABCD নির্ণেয় সামান্তরিক হইবে।

প্রমাণ। ABD ও CDB ত্রিভুজদ্বয়ের

AB = DC

AD = BC

এবং DB উভয়ের সাধারণ বাহু;

∴ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম। (উপ. ৭)

∴ ∠ABD = ∠CDB এবং ইহারা একান্তর কোণ;

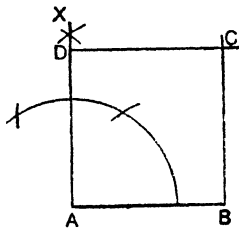
অতএব, AB ∥ CD। (উপ. ১৪)

কিন্তু, AB = CD; ∴ AD ∥ BC। (উপ. ১৯)

∴ ABCD সামান্তরিক।

সম্পাদ্য ১৩ (Problem 13)

একটি নির্দিষ্ট বাহুর উপর একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To construct a square on a given side.]

চিত্র ১৩৬

AB একটি নির্দিষ্ট বাহু। ইহার উপর একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। AB রেখার A বিন্দুতে AX লম্ব টান এবং AX হইতে ABর সমান করিরা AD অংশ কাটিয়া লও।

B ও D কেন্দ্র করিয়া AB ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি বৃত্তচাপ অঙ্কিত কর; মনে কর, ইহারা C বিন্দুতে ছেদ করে। BC ও DC যোগ কর।

ABCD নির্ণেয় বর্গক্ষেত্র।

প্রমাণ। সম্পাদ্য ১২ অনুসারে ABCD একটি সামান্তরিক প্রমাণ করা যায়। ইহার একটি কোণ A সমকোণ এবং বাহুগুলি অঙ্কনানুসারে সমান বলিয়া ABCD একটি বর্গক্ষেত্র হইবে।

মন্তব্য। এই সম্পাদ্য দুইটির সমাধান প্রণালী সম্পাদ্য ১০এর অনুরূপ।

বিশেষ দ্রষ্টব্য। চতুর্ভুজ অঙ্কনে পাঁচটি নিরপেক্ষ উপাত্তের প্রয়োজন। কিন্তু শেষোক্ত দুইটি সম্পাদ্যে দেখা যায় যে, প্রথমটিতে মাত্র তিনটি ও দ্বিতীয়টিতে মাত্র একটি উপাত্ত আছে। সামান্তরিক ও বর্গক্ষেত্র চতুর্ভুজ; সুতরাং উপাত্ত সম্বন্ধে এরূপ পার্থক্যের হেতু কি? একটু চিন্তা করিলেই বুঝিতে পারা যায় যে পার্থক্য কিছুই নাই। সামান্তরিকের বিপরীত বাহু সমান বলিয়া, দুইটি বাহু দেওয়া থাকিলে আর দুইটি বাহুও দেওয়া থাকে; এবং বর্গক্ষেত্রের একটি বাহু দেওয়া থাকিলে আর তিনটি বাহুও দেওয়া থাকে; অধিকন্তু, একটি কোণ সমকোণ ইহাও দেওয়া থাকে। সুতরাং, এই এই স্থলেও পাঁচটি উপাত্ত দেওয়া আছে।

অনুশীলনী ২৮

১। একটি চতুর্ভুজ অঙ্কিত কর যাহার

(ক) তিনটি বাহু ও দুইটি কর্ণ দেওয়া আছে

(খ) দুইটি সন্নিহিত বাহু ও তিনটি কোণ দেওয়া আছে।

২। নিম্ন উপাত্তগুলি হইতে একটি সামান্তরিক অঙ্কিত কর।

(ক) দুইটি সন্নিহিত বাহু ($3''$ ও $5''$) এবং একটি কর্ণ ($7''$)।

(খ) দুইটি কর্ণ ও তাহাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ।

(গ) একটি বাহু ও দুইটি কর্ণ।

৩। একটি বাহু ও একটি কর্ণ দেওয়া আছে, একটি আয়তক্ষেত্র অঙ্কিত কর।

৪। একটি রম্বস অঙ্কিত কর যাহার

(১) একটি বাহু ও একটি কোণ দেওয়া আছে।

(২) দুইটি কর্ণ দেওয়া আছে।

৫। একটি রম্বসের একটি বাহু ও একটি কর্ণ উভয়ের দৈর্ঘ্য $1{\cdot}5''$। রম্বসটি অঙ্কিত কর। রম্বসের কোণগুলির পরিমাণ কত?

৬। $1{\cdot}5''$ দীর্ঘ সরলরেখাকে কর্ণ ধরিয়া একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর।

৭। কোন ট্রাপিজিয়মের সমান্তরাল বাহু দুইটি ও অপর বাহু দুইটি দেওয়া আছে; ট্রাপিজিয়ম অঙ্কিত কর।

৮। একটি সামান্তরিক অঙ্কিত কর যাহার দুইটি কর্ণ পরস্পর সমান এবং যাহার দুইটি সন্নিহিত বাহুর দৈর্ঘ্য $3''$ ও $3{\cdot}5''$।

৯। নিম্ন উপাত্তগুলি হইতে সামান্তরিক অঙ্কন সম্ভব কিনা পরীক্ষা কর।

একটি বাহু $3''$, ও কর্ণদ্বয় যথাক্রমে $2''$ ও $4''$।

দশম অধ্যায়

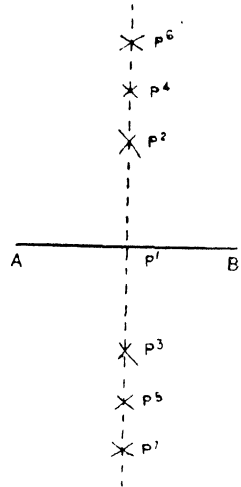
সঞ্চারপথ

৫৭। ইতঃপূর্বে একটি নিয়মের অধীন কোন বিন্দুর সঞ্চারপথ অঙ্কন সম্বন্ধে আলোচনা করা হইয়াছে। এক্ষণে তুইটি স্বতন্ত্র নিয়মের অধীন কোন বিন্দুর সঞ্চারপথ সম্বন্ধে আলোচনা করা যাইতেছে।

৫৮। তুইটি স্বতন্ত্র নিয়মাধীন বিন্দুর সঞ্চারপথের নক্‌সা অঙ্কন

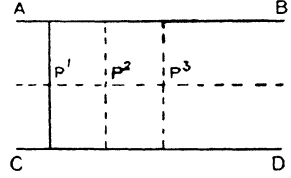
(১) A ও B তুইটি স্থির বিন্দু, ইহা হইতে সর্বদা সমান দূরে থাকিবে এমন একটি বিন্দু Pর অবস্থানগুলি নির্ণয় করিতে হইবে।

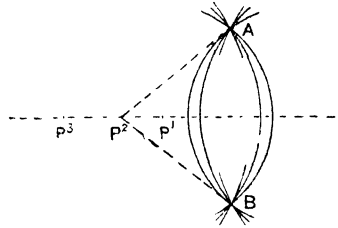
AB সরলরেখার মধ্যবিন্দু P^1, P বিন্দুর একটি অবস্থান—ইহা সুস্পষ্ট।

A ও Bকে কেন্দ্র করিয়া AP^1 হইতে অধিক দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ লইয়া AB রেখার উভয় পার্শ্বে বৃত্তচাপ অঙ্কিত কর; মনে কর, বৃত্তচাপগুলি P^2 ও P^3তে ছেদ করে; P^1 ও P^3, P বিন্দুর আর তুইটি অবস্থান। এই প্রকার আরও কতকগুলি বৃত্তচাপ অঙ্কিত করিলে P^4, P^5, P^6, P^7 প্রভৃতি P বিন্দুর অন্যান্য অবস্থান স্থির হইবে। P^1, P^2 ...প্রভৃতি বিন্দুগুলি খুব কাছাকাছি লইয়া রুলার দ্বারা পরীক্ষা করিলে দেখা যায় যে ইহারা এক সরলরেখায় অবস্থিত।

চিত্র ১৩৭

সুতরাং এই বিন্দুগুলির ভিতর দিয়া যে সরলরেখা টানা যায় তাহাই P বিন্দুর সঞ্চারপথের নকসা। এই সরলরেখার উপর যে কোন বিন্দু X লইয়া মাপিয়া দেখ XA = XB হইয়াছে কিনা।

(২) AB ও CD দুইটি সমান্তরাল সরলরেখা। এই দুইটি রেখা হইতে সর্বদা সমান দূরে থাকিবে এমন একটি বিন্দু Pএর সঞ্চারপথ আঁকিতে হইবে।

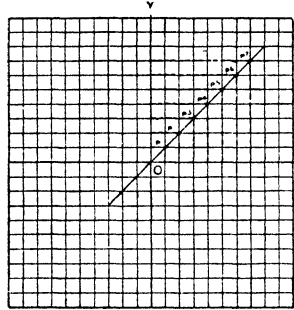
ABর যে কোন বিন্দু হইতে CDর উপর একটি লম্ব টান এবং এই লম্বের মধ্য বিন্দু P', Pর একটি অবস্থান। এ প্রকার কাছাকাছি কতকগুলি লম্ব টানিয়া তাহাদের মধ্যবিন্দু P^2, P^3...নির্ণয় কর। রুলার দ্বারা পরীক্ষা করিয়া দেখ P', P^2, P^3 বিন্দুগুলি একই সরলরেখায় অবস্থিত। সুতরাং এই বিন্দুগুলির ভিতর দিয়া যে সরল রেখা টানা যায় তাহাই P বিন্দুর সঞ্চারপথ। এই সরলরেখার উপর যে কোন বিন্দুX লইয়া পরীক্ষা কর ইহার দূরত্ব সমান কিনা।

চিত্র ১৩৮

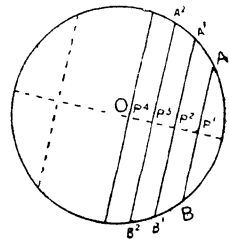
(৩) দুইটি স্থির বিন্দু A ও Bএর ভিতর দিয়া যাইবে এমন বৃত্তের কেন্দ্রের সঞ্চারপথ ১৩৯ চিত্রে P^1 P^2 P^3 সরল রেখার দ্বারা প্রদর্শিত হইল।

চিত্র ১৩৯

(৪) OX এবং OY দুইটি সরলরেখা লম্বভাবে পরস্পর ছেদ করিয়াছে। এই উভয় রেখা হইতে সমান দূরে থাকিবে এমন একটি বিন্দু Pএর সঞ্চারপথ নির্ণয় করিতে হইবে।

এই সম্পাদ্যটির সমাধান করিতে হইলে 'লেখ' কাগজের (Graph paper) ব্যবহারে বিশেষ সুবিধা হইবে। লেখ-কাগজে সমান সমান বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত থাকে। ইহার ব্যবহার দ্বারা সম্পাদ্যটির সমাধান প্রণালী প্রদর্শিত হইল।

(চিত্র ১৪০ দেখ)

OX ও OY দুইটি লম্ব ভাবে ছেদক রেখা টান; এবং OX ও OY বরাবর গণনা করিয়া উভয় হইতে সমান দূরে অবস্থিত P^1, P^2, P^3 প্রভৃতি বিন্দু চিহ্নিত কর। পরীক্ষা করিয়া দেখ ইহারা একই সরলরেখায় অবস্থিত। স্থতরাং P^1, P^2, P^3 ইত্যাদি বিন্দুর ভিতর দিয়া যে সরলরেখা টানা হইবে তাহাই P বিন্দুর সঞ্চারপথ হইবে। এই সরল রেখার উপর যে কোন একটি বিন্দু লইয়া পরীক্ষা করিয়া দেখ ইহা OX ও OY হইতে সমান দূরে কি না। আর পরীক্ষা কর এই সরলরেখা XOY কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে কি না।

চিত্র ১৪০

(৫) O বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া একটি বৃত্ত আঁক। AB, A^1B^1, A^2B^2 ···ইত্যাদি ইহার সমান্তরাল কতকগুলি জ্যা। P^1, P^2, P^3 প্রভৃতি AB, A^1B^1, A^2B^2 ইত্যাদি জ্যার মধ্যবিন্দু। রুলার দ্বারা পরীক্ষা করিয়া দেখ P^1, P^2, P^3 প্রভৃতি বিন্দু একই সরলরেখায় অবস্থিত; এবং এই সরলরেখা কেন্দ্র O ভেদ করিয়া যায়। স্থতরাং একটি বৃত্তের পরস্পর সমান্তরাল জ্যাগুলির মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ এই সরলরেখা হইবে। ইহার উপর আর একটি বিন্দু X লইয়া তাহার ভিতর দিয়া AO সহিত সমান্তরাল আর একটি জ্যা আঁকিয়া দেখ ইহা X বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইবে।

চিত্র ১৪১

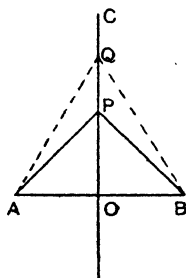
৫৯। দুইটি নিয়মাধীন বিন্দুর সঞ্চারপথ অঙ্কন প্রণালী যুক্তিদ্বারা সমর্থন করিয়া ইহা প্রতিষ্ঠিত করিতে হইবে। সঞ্চারপথ প্রতিষ্ঠিত করিতে হইলে দুইটি বিষয় প্রমাণ করিতে হইবে—

(১) নির্দিষ্ট নিয়মের অধীন বিন্দু সঞ্চারপথের উপর থাকিবে;

এবং (২) সঞ্চারপথের উপর যে কোন বিন্দু নির্দিষ্ট নিয়মের অধীন হইবে।

উপপাদ্য ২২ (Theorem 22)

দুইটি স্থির বিন্দু হইতে সমান দূরে অবস্থিত কোন বিন্দুর সঞ্চারপথ উক্ত বিন্দুদ্বয়ের সংযোজকরেখার লম্বদ্বিখণ্ডক হইবে।

[The locus of a point equidistant from two fixed points is the perpendicular bisector of the straight line joining the fixed points.]

চিত্র ১৪২

মনে কর, A ও B দুইটি স্থির বিন্দু।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, AB রেখার লম্বদ্বিখণ্ডক A ও B হইতে সমদূরবর্তী বিন্দুর সঞ্চারপথ হইবে ; অর্থাৎ (১) A ও B হইতে সমদূরবর্তী যে কোন বিন্দু লম্বদ্বিখণ্ডকের উপর থাকিবে এবং (২) ঐ লম্বদ্বিখণ্ডকের যে কোন বিন্দু A ও B হইতে সমান দূরে অবস্থিত হইবে।

মনে কর, O বিন্দুটি ABর মধ্যবিন্দু।

(১) মনে কর, P এমন একটি বিন্দু যে PA = PB ।

প্রমাণ। PA, PB এবং PO যোগ কর।

PAO ও PBO ত্রিভুজদ্বয়ের

PA = PB

AO = OB

এবং PO সাধারণ বাহু ;

∴ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম। (উপ. ৭)

∴ ∠POA = ∠POB, এবং ইহারা সন্নিহিত কোণ ;

অতএব PO, ABর উপর লম্ব।

সুতরাং, P বিন্দু লম্বদ্বিখণ্ডক POর উপর থাকিবে।

(২) মনে কর, লম্বদ্বিখণ্ডক POর উপর Q যে কোন একটি বিন্দু।

QA ও QB যোগ কর।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, QA = QB।

প্রমাণ। QOA এবং QOB ত্রিভুজদ্বয়ের

OA = OB

QO সাধারণ বাহু

এবং অন্তর্ভূর্ত ∠QOA = অন্তর্ভূর্ত ∠QOB (∵ সমকোণ) ;

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। (উপ. ৪)

∴ QA = QB।

সুতরাং, POর উপর অবস্থিত যে কোন বিন্দু, A ও B হইতে সমদূরবর্তী।

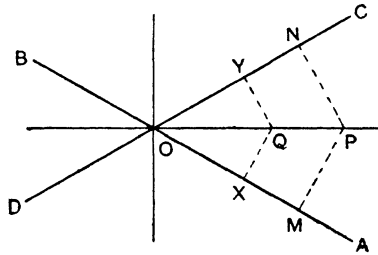
অতএব প্রমাণিত হইল যে, নির্ণেয় সঞ্চারপথ A ও B বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখার লম্বদ্বিখণ্ডক।

দ্রষ্টব্য। POর বহিঃস্থ যে কোন বিন্দু X লইয়া ইহাও প্রমাণ করা যাইতে পারে যে, XA ও XB পরস্পর অসমান।

———

উপপাদ্য ২৩ (Theorem 23)

দুইটি পরস্পরচ্ছেদী সরলরেখা হইতে সমান দূরে অবস্থান করিবে এমন একটি বিন্দুর সঞ্চারপথ, ঐ দুইটি সরলরেখার অন্তর্ভূ্ত কোণ-দ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডক সরলরেখাদ্বয় হইবে।

[The locus of a point equidistant from two given intersecting straight lines is the pair of straight lines which bisect the angles between the two given lines.]

চিত্র ১৪৩

AB ও CD দুইটি পরস্পরচ্ছেদী সরলরেখা O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

(১) AB ও CD হইতে সমদূরে অবস্থিত কোন বিন্দুর সঞ্চারপথ AB ও CDএর অন্তর্ভূ্ত কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডক রেখাদ্বয় হইবে ; এবং

(২) উক্ত সমদ্বিখণ্ডক রেখাদ্বয়ের উপর অবস্থিত যে কোন বিন্দু AB ও CD হইতে সমান দূরে অবস্থিত হইবে।

প্রমাণ। (১) মনে কর, $\angle$AOCর অন্তরস্থিত P একটি বিন্দু, এবং উহা AB ও CD হইতে সমদূরবর্তী ; অর্থাৎ, P হইতে যথাক্রমে AB ও CDর উপর অঙ্কিত PM ও PN লম্বদ্বয় পরস্পর সমান। OP যোগ কর।

OPN ও OPM এই সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের

PN = PM

অতিভুজ OP সাধারণ ;

$\therefore$ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম। (উপ. ১৮)

$\therefore$ $\angle PON = \angle POM$।

সুতরাং, P, ∠AOCর সমদ্বিখণ্ডক রেখার উপর অবস্থিত।

(২) মনে কর, ∠AOCর সমদ্বিখণ্ডক OPর উপর Q যে কোন একটি বিন্দু ; এবং, OA ও OCর উপর অঙ্কিত লম্ব যথাক্রমে QX ও QY।

QOY এবং QOX ত্রিভুজদ্বয়ের

∠QOY = ∠QOX

QO বাহু সাধারণ

এবং ∠QYO = ∠QXO (∵ সমকোণ) ;

∴ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম। (উপ. ৪)

∴ QX = QY।

এই প্রকারে প্রমাণ করা যায় যে ∠AODর সমদ্বিখণ্ডক রেখাও সঞ্চারপথ হইতে পারে। অতএব, নির্ণেয় বিন্দুর সঞ্চারপথ AB ও CDর অন্তর্ভূত কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডক দুইটি সরলরেখা।

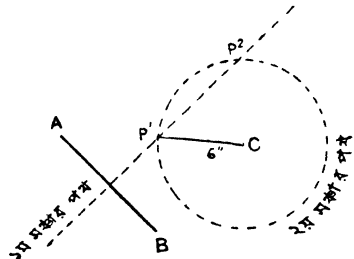
অনুশীলনী ২৯

১। এমন একটি বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় করিতে হইবে যাহা দুইটি স্থির বিন্দু হইতে সমান দূরে থাকিবে এবং একটি তৃতীয় স্থির বিন্দু হইতে নির্দিষ্ট (·6″) পরিমাণ দূরে থাকিবে।

(১) A ও B দুইটি স্থির বিন্দু। ইহাদের হইতে সমান দূরে অবস্থিত বিন্দুর সঞ্চারপথ AB সরলরেখার লম্বদ্বিখণ্ডক। (প্রথম সঞ্চারপথ)

(২) C আর একটি বিন্দু। ইহাকে কেন্দ্র করিয়া ·6″ ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্ত দ্বিতীয় নিয়মাধীন বিন্দুর সঞ্চারপথ।

মনে কর, এই দুইটি সঞ্চারপথ পরস্পর P^1 ও P^2 বিন্দুতে ছেদ করে।

P^1 এবং P^2 উভয় বিন্দুই A ও B হইতে সমান দূরে এবং C হইতে ·6″ দূরে অবস্থিত।

চিত্র ১৪৪

মন্তব্য। দুইটি সঞ্চারপথের ছেদ না হইলে P^1 ও P^2র অবস্থান অসম্ভব অর্থাৎ কাল্পনিক (imaginary)।

২। ABC একটি ত্রিভুজ। A ও B হইতে সমান দূরে অবস্থিত BCর উপর একটি বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় কর।

৩। দুইটি বিন্দু হইতে সমদূরবর্তী এবং একটি সরলরেখা হইতে 1″ দূরে অবস্থিত বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় কর। (উপ. ২২ ও অনু. ৫৮ (২))

৪। AB ও AC একটি বৃত্তের দুইটি জ্যা। বৃত্তোপরি এমন একটি বিন্দু নির্দেশ কর যাহা AB ও AC হইতে সমান দূরে অবস্থিত।

৫। এক সরলরেখায় অবস্থিত নয় এমন তিনটি বিন্দু A, B ও C ; এমন একটি বিন্দু নির্দেশ কর যাহা A, B ও C হইতে সমান দূরে অবস্থিত হইবে।

(১) A ও B হইতে সমান দূরে অবস্থিত বিন্দুর সঞ্চারপথ AB রেখার লম্ব সমদ্বিখণ্ডক।

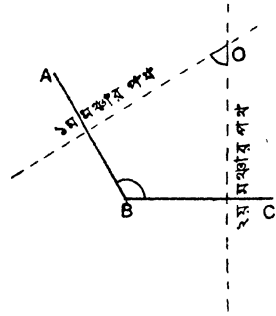
(২) B ও C হইতে সমান দূরে অবস্থিত বিন্দুর সঞ্চারপথ BC রেখার লম্বদ্বিখণ্ডক।

এই দুইটি সঞ্চারপথ O বিন্দুতে ছেদ করে। O বিন্দুই A, B ও C হইতে সমান দূরে অবস্থিত।

দ্রষ্টব্য। (১) A, B ও C একই সরলরেখায় অবস্থিত হইলে বিন্দুটি পাওয়া যাইত না। কেন?

(২) O বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া OA ব্যাসার্ধ লইয়া বৃত্ত অঙ্কিত করিলে ইহা B ও C দিয়া গমন করিবে।

চিত্র ১৪৫

৬। ABC একটি ত্রিভুজ; তিনটি বাহু হইতে সমান দূরে অবস্থিত কোন বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় কর। এইরূপ কতকগুলি বিন্দু হইতে পারে?

৭। ABC একটি ত্রিভুজ। এমন একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর যাহা A, B ও C কে অতিক্রম করিয়া যাইবে।

৮। AB একটি $3\frac{1}{2}''$ দীর্ঘ স্থির রেখা। AB হইতে $\frac{1}{2}''$ দূরে এবং A হইতে $1''$ দূরে অবস্থিত O একটি স্থির বিন্দু। AB হইতে $1''$ এবং O হইতে $1\frac{1}{2}''$ দূরে অবস্থিত বিন্দুগুলির অবস্থান নির্ণয় কর।

৯। AB একটি স্থির সরলরেখা এবং P ইহার বহিঃস্থ স্থির বিন্দু। AB রেখায় Q একটি সচলবিন্দু। PQ এর মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

১০। AB ও CD দুইটি সমান্তরাল স্থির সরলরেখা। P ও Q যথাক্রমে AB ও CDর উপরিস্থ দুইটি সচলবিন্দু। PQএর মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

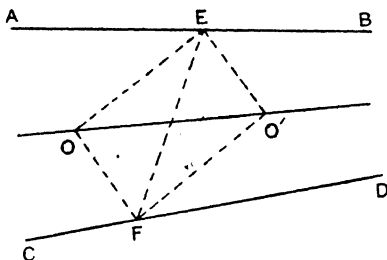
১১। ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ; ইহার অতিভুজ BC স্থির। A বিন্দু গতিশীল হইলে ইহার সঞ্চারপথ কি হইবে নির্ণয় কর।

১২। OX এবং OY দুইটি স্থির দণ্ড O বিন্দুতে লম্বভাবে অবস্থিত। একটি $3''$ দীর্ঘ দণ্ড ABর প্রান্তদ্বয়, সর্বাবস্থায় OX ও OYএর উপর অবস্থিত থাকে। ABর মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

১৩। একটি বৃত্তস্থিত A একটি স্থির বিন্দু এবং P একটি গতিশীল বিন্দু। APর মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

১৪। OX এবং OY দুইটি পরস্পর লম্বভাবে ছিন্ন সরলরেখা। P, OX স্থিত এবং Q, OY স্থিত দুইটি বিন্দু। যদি P ও Qএর সর্বাবস্থানে OP + OQ ধ্রুব থাকে, তবে PQএর মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

১৫। AB একটি অসীম স্থির সরলরেখা। ইহা হইতে 2″ দূরে অবস্থিত O একটি স্থির বিন্দু। P, AB স্থিত একটি গতিশীল বিন্দু। PO স্থিত একটি বিন্দু Q, PO রেখার সর্বাবস্থানে P হইতে $1\frac{1}{3}''$ দূরে অবস্থিত হইলে ইহার সঞ্চারপথ কিরূপ হইবে অঙ্কিত কর।

১৬। দুইটি সরলরেখা AB, CDর ছেদবিন্দু অগম্য (inaccessible); উহাদের অন্তর্ভূত কোণের দ্বিখণ্ডক রেখা কিরূপে অঙ্কন করা যাইতে পারে ?

চিত্র ১৪৬

অঙ্কন। AB ও CDর ভেদক যে কোন সরলরেখা EF লও। ∠AEF ও ∠CFEর দ্বিখণ্ডকদ্বয় অঙ্কন কর। মনে কর, তাহারা O বিন্দুতে ছেদ করিল। অনুরূপে, ∠BEF ও ∠DFEর দ্বিখণ্ডকদ্বয় অঙ্কিত করিলে তাহারা O′ বিন্দুতে ছেদ করিল। OO′ যোগ কর।

OO′ রেখা বর্ধিত হইলে AB ও CDর অন্তর্ভূত কোণকে দ্বিখণ্ডিত করিবে।

প্রমাণ। ২৩ উপপাদ্য অনুসারে O বিন্দুর দূরত্ব, AB ও EF রেখা হইতে পরস্পর সমান।
∴ O, AB ও CD হইতে সমদূরবর্তী। অনুরূপে, O′, AB ও CD হইতে সমদূরবর্তী।
অতএব, OO′ সরলরেখা AB, CDর অন্তর্ভূত কোণের দ্বিখণ্ডক।

১৭। দুইটি পরস্পরচ্ছেদী সরলরেখা হইতে এরূপ দূরে একটি বিন্দু আছে যে রেখাদ্বয় হইতে বিন্দুর দূরত্ব দুইটির বৈজিক সমষ্টি ধ্রুব ; বিন্দুটির সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

সংকেত : মনে কর AB ও AC ঐ রেখাদ্বয়। ABর সমান্তরাল DE রেখাটি এরূপ ভাবে টান যেন উভয়ের দূরত্ব কোন ধ্রুব সংখ্যার পরিমাণ হয়। ধর, AC ও DE রেখা O বিন্দুতে ছেদ করিল : তাহা হইলে AOE, DOC কোণদ্বয়ের দ্বিখণ্ডক দুইটি সঞ্চারপথ হইবে। অন্যান্য সঞ্চারপথ থাকা কখন সম্ভব ?

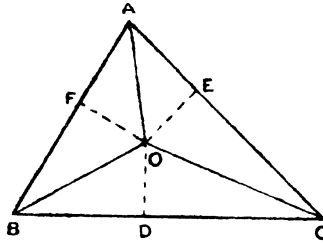
১৮। একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা ও একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে সমদূরবর্তী বিন্দুগুলির অবস্থান নির্ণয় করিয়া সঞ্চারপথ অঙ্কিত কর।

একাদশ অধ্যায়

রেখার সমবিন্দুতা

৬০। **সমবিন্দু রেখা**—তিন বা ততোধিক সরলরেখা এক বিন্দুতে মিলিত হইলে তাহাদিগকে **সমবিন্দু** (concurrent) সরলরেখা বলে ; এবং ঐ বিন্দুটিকে তাঁহাদের **সম্পাতবিন্দু** (point of concurrency) বলে।

১। ত্রিভুজের কোণগুলির অন্তর্দ্বিখণ্ডকত্রয় সমবিন্দু হইবে অর্থাৎ এক বিন্দুতে মিলিত হইবে।

[The bisectors of the angles of a triangle are concurrent.]

চিত্র ১৪৭

ABC একটি ত্রিভুজ ; মনে কর, ∠B ও ∠C এর সমদ্বিখণ্ডক রেখাদ্বয় O বিন্দুতে মিলিত হইল। OA যোগ কর।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

OA, ∠A এর সমদ্বিখণ্ডক।

O হইতে BC, CA ও ABর উপর যথাক্রমে OD, OE ও OF লম্ব টান।

প্রমাণ। যেহেতু BO, ∠B এর সমদ্বিখণ্ডক,

∴ BO, AB ও BC হইতে সমদূরবর্তী বিন্দুর সঞ্চারপথ ;

∴ OD=OF। (উপ ২৩)

আবার, যেহেতু CO, ∠C এর সমদ্বিখণ্ডক ;

∴ CO, BC ও AC হইতে সমদূরবর্তী বিন্দুর সঞ্চারপথ ;

∴ OD = OE ;

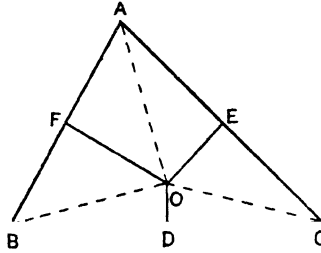
∴ OF = OE।

সুতরাং, O বিন্দু AB ও AC হইতে সমদূরবর্তী বিন্দুর সঞ্চারপথের উপর অবস্থিত ;

∴ OA, ∠Aর সমদ্বিখণ্ডক।

∴ ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমদ্বিখণ্ডক রেখাত্রয় সমবিন্দু।

২। কোন ত্রিভুজের বাহুগুলির লম্বদ্বিখণ্ডকত্রয় সমবিন্দু।

[The perpendicular bisectors of the sides of a triangle are concurrent.]

চিত্র ১৪৮

ABC একটি ত্রিভুজ। ধর, D, E, F যথাক্রমে BC, CA ও AB মধ্যবিন্দু এবং F ও E হইতে যথাক্রমে AB ও ACর উপর অঙ্কিত লম্বদ্বয় O বিন্দুতে ছেদ করে। OD যোগ কর।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

OD ⊥ BC।

প্রমাণ। OA, OB ও OC যোগ কর।

যেহেতু, FO, ABর লম্বদ্বিখণ্ডক,

∴ FOর উপর অবস্থিত যে কোন বিন্দু, A ও B হইতে সমান দূরে অবস্থিত।

∴ OB = OA । (উপ. ২২)

আবার, যেহেতু OE, ACর লম্বদ্বিখণ্ডক,

∴ OA = OC ।

∴ OB = OC ।

সুতরাং O, BCর লম্বদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত হইবে ।

∴ OD ⊥ BC ;

সুতরাং, ত্রিভুজের বাহুগুলির লম্বদ্বিখণ্ডকত্রয় সমবিন্দু ।

৩ । ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুত্রয় হইতে বিপরীত বাহু তিনটির উপর লম্ব তিনটি সমবিন্দু হইবে ।

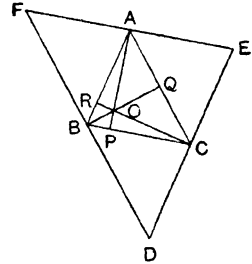
[The perpendiculars drawn from the vertices of a triangle to the opposite sides are concurrent.]

চিত্র ১৪৯

ABC একটি ত্রিভুজ এবং AP, BQ, ও CR যথাক্রমে BC, CA ও ABর উপর লম্ব ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

AP, BQ ও CR সমবিন্দু ।

অঙ্কন । A, B ও Cর ভিতর দিয়া যথাক্রমে BC, CA ও AB এর সমান্তরাল তিনটি রেখা টান ; মনে কর, এই তিনটি রেখা DEF ত্রিভুজ উৎপন্ন করিল ।

প্রমাণ। ∵ FE ∥ BC এবং FD ∥ AC,

∴ ACBF একটি সামান্তরিক ।

∴ FA = BC ।

এইরূপে, AECB একটি সামান্তরিক,

∴ BC = AE ;

∴ FA = AE ।

অর্থাৎ A, FEর মধ্যবিন্দু ।

এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে, B, FDর এবং C, DF এর মধ্যবিন্দু।

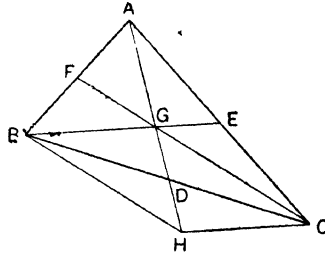
আবার, ∵ $AP \perp BC$, ∴ $AP \perp FE$।

অনুরূপে, $CR \perp DE$ এবং $BQ \perp FD$।

সুতরাং, AP, BQ ও CR, DEF ত্রিভুজের বাহু তিনটির লম্ব দ্বিখণ্ডক

∴ AP, BQ ও CR সমবিন্দু।

৪। ত্রিভুজের মধ্যমা তিনটি সমবিন্দু।

[The medians of triangle are concurrent.]

চিত্র ১৫০

ধর, ABC ত্রিভুজের BE ও CF মধ্যমাদ্বয় G বিন্দুতে ছেদ করে ; এবং AG যোগ করিয়া ইহাকে বর্ধিত করিলে উহা BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করে

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

AD ত্রিভুজের তৃতীয় মধ্যমা।

অঙ্কন। C এর ভিতর দিয়া EBর সমান্তরাল CH রেখা টান AD বর্ধিত কর, এবং মনে কর, ইহা CH কে H বিন্দুতে ছেদ করে BH যোগ কর।

প্রমাণ। ACH ত্রিভুজের E, ACর মধ্যবিন্দু এবং $EG \parallel CH$

∴ G, AH এর মধ্যবিন্দু। [অনু. ২৭, প্রশ্ন ১]

আবার, AHB ত্রিভুজের G ও F যথাক্রমে AH ও AB বাহুর মধ্যবিন্দু

∴ $GF \parallel HB$, অর্থাৎ $CF \parallel HB$। [অনু. ২৭, প্রশ্ন ২]

∴ BHCG একটি সামান্তরিক।

যেহেতু সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে, [উপ. ২০, অনু. ৩]

$\therefore$ BD = CD ;

অর্থাৎ D, BC বাহুর মধ্যবিন্দু।

অতএব, ABC ত্রিভুজের AD একটি মধ্যমা।

সুতরাং, ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় সমবিন্দু।

অনুসিদ্ধান্ত। ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় প্রত্যেক মধ্যমার একটি সমত্রিখণ্ডক বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করে।

[The medians of a triangle intersect at a point of trisection of each median.]

প্রমাণ করা হইয়াছে যে AG = GH, এবং GD = DH ;

$\therefore$ AG = 2GD এবং GD = $\frac{1}{3}$AD।

এই প্রকারে, GE = $\frac{1}{3}$BE এবং GF = $\frac{1}{3}$CF।

সংজ্ঞা। মধ্যমাত্রয়ের ছেদবিন্দুকে ত্রিভুজের **ভরকেন্দ্র** (centroid) বলে।

প্রশ্ন ১। ত্রিভুজের কোন্ কোন্ বিশেষ রেখাগুলি সমবিন্দু?

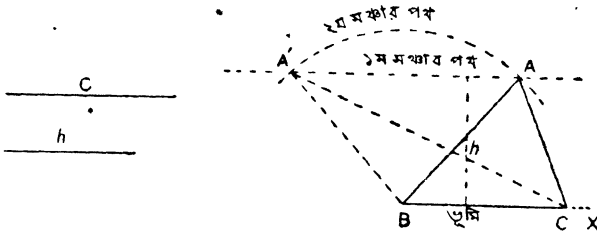
২। যদি ১৫০ চিত্রে A, B ও C হইতে অঙ্কিত মধ্যমাত্রয়ের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে p, q, ও r হয়, তবে ঐ চিত্রে এমন তিনটি ত্রিভুজের নাম কর যাহাদের বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে ($\frac{2}{3}p$, $\frac{2}{3}q$, $\frac{2}{3}r$,) ($\frac{1}{2}b$, $\frac{2}{3}p$, $\frac{1}{3}q$) ও ($\frac{1}{2}a$, c, p) হইবে।

দ্বাদশ অধ্যায়

বিবিধ ত্রিভুজাঙ্কন

৬১। ইতঃপূর্বে বলা হইয়াছে যে, কোন ত্রিভুজের উপাত্তগুলি দ্বারা উহার তিনটি শীর্ষবিন্দুর অবস্থান নির্দেশ করিতে হইবে। উপাত্তগুলি হইতে শীর্ষবিন্দুত্রয়ের সঞ্চারপথ নির্ণয় করা এবং সঞ্চারপথগুলির ছেদ দ্বারা উহাদের অবস্থান নির্দেশ করাই ত্রিভুজ অঙ্কনের সহজ উপায়।

১। ত্রিভুজের ভূমি, একটি বাহু ও উচ্চতা দেওয়া আছে; ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

[Given the base, the altitude and one side, to construct the triangle.]

চিত্র ১৫১

বিশ্লেষণ :—ভূমির সমান দীর্ঘ একটি রেখা BC লও; B ও C নির্ণেয় ত্রিভুজের দুইটি শীর্ষবিন্দু হইবে।

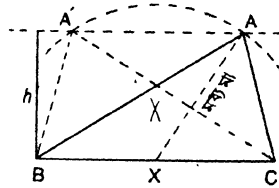
তৃতীয় শীর্ষবিন্দু A, BC হইতে নির্দিষ্ট h একক দূরে অবস্থিত; সুতরাং, BC হইতে h একক দূরে একটি সমান্তরাল রেখা ইহার প্রথম সঞ্চারপথ। A আবার B হইতে c একক দূরে অবস্থিত; সুতরাং, Bকে কেন্দ্র করিয়া c একক ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্ত ইহার দ্বিতীয় সঞ্চারপথ; মনে কর, এই দুইটি সঞ্চারপথ A ও A' বিন্দুতে ছেদ করে। AB ও AC যোগ করিলে $\triangle$ABC, এবং A'B ও A'C যোগ করিলে $\triangle$A'BC—এই দুইটি নির্ণেয় ত্রিভুজ হইবে।

এইরূপে তিনটি শীর্ষবিন্দুর অবস্থান নির্ণয় করিয়া অঙ্কন প্রণালী নিম্নপ্রকারে লিখিতে হইবে—

একটি সরলরেখা BX হইতে ভূমির সমান করিয়া BC কাটিয়া লও। BC হইতে h একক দূরে ইহার সমান্তরাল একটি রেখা টান, এবং B কে কেন্দ্র করিয়া c একক ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ অঙ্কিত কর; এবং মনে কর, এই বৃত্তচাপ সমান্তরাল রেখাটিকে A ও A' বিন্দুতে ছেদ করে। AB ও AC যোগ কর; ABC ত্রিভুজটি নির্ণেয় ত্রিভুজ হইবে। A'BCও অপর একটি ত্রিভুজ।

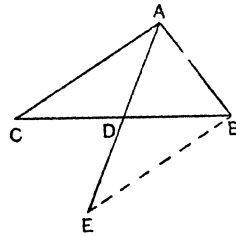
২। ত্রিভুজের ভূমি, ভূমির দ্বিখণ্ডক মধ্যমা ও উচ্চতা দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

(Given the base, the median which bisects the base and the altitude, to construct the triangle.)

BC ভূমিকে X বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর। X কে কেন্দ্র করিয়া মধ্যমার পরিমাণ ব্যাসার্ধ লইয়া বৃত্ত অঙ্কিত কর। (১ম সঞ্চারপথ)। BC হইতে h একক দূরে সমান্তরাল রেখা টান (২য় সঞ্চারপথ)। এই রেখা ও বৃত্ত A ও A′ বিন্দুতে ছেদ করে। ABC ও A′ BC দুইটি নির্ণেয় ত্রিভুজ।

চিত্র ১৫২

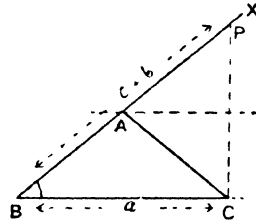
৩। দুইটি বাহু ও ইহাদের অন্তর্ভূত শীর্ষকোণ হইতে অঙ্কিত মধ্যমা দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

(Given two sides and the median which bisects the third side, to construct the triangle.)

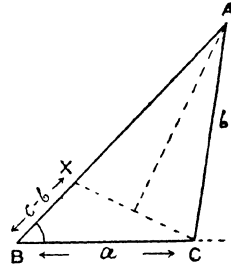
মধ্যমার সরলরেখা AD লইয়া ইহাকে দ্বিগুণ করিয়া E পর্যন্ত বর্ধিত কর। A ও E কে কেন্দ্র করিয়া যথাক্রমে প্রদত্ত বাহুদ্বয়ের সমান ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি বৃত্তচাপ অঙ্কিত কর। মনে কর, এই দুইটি বৃত্তচাপ B বিন্দুতে ছেদ করে ; BD যোগ কর এবং ইহাকে C পর্যন্ত বর্ধিত কর যেন BD = DC হয়। CA যোগ কর। ABC নির্ণেয় ত্রিভুজ হইবে।

চিত্র ১৫৩

($\triangle$ADC ও $\triangle$BDE সর্বসম ; $\therefore$ AC = BE)

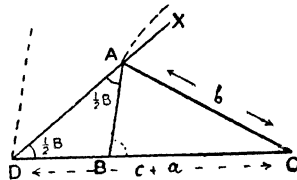
৪। দুইটি বাহুর সমষ্টি $(b+c)$, উহাদের একটির বিপরীত কোণ B এবং তৃতীয় বাহু a দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

প্রদত্ত কোণের সমান ∠CBX আঁক ; এবং ইহার একটি বাহু হইতে a বাহুর সমান BC কাটিয়া লও ; (B ও C নির্ণেয় ত্রিভুজের দুইটি শীর্ষ-বিন্দু ; তৃতীয় বিন্দু BX এর উপর থাকিবে)। CBX কোণ হইতে BP অংশ দুই বাহুর সমষ্টি $c+b$ এর সমান কাটিয়া লও। CP যোগ কর। (তৃতীয় শীর্ষবিন্দু C ও P হইতে সমান দূরে থাকিবে)। PC রেখার লম্বদ্বিখণ্ডক টানিয়া BX কে A বিন্দুতে ছেদ কর। AC যোগ কর ; ABC নির্ণেয় ত্রিভুজ হইবে ; (কারণ, $AC = AP$, $\therefore$ $BA + AC = BP = c + b$)

চিত্র ১৫৪

৫। দুইটি বাহুর অন্তরফল $(c-b)$, উহাদের ক্ষুদ্রতর বাহুর বিপরীত কোণ B ও আর একটি বাহু a দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

∠B এর সহিত সমান করিয়া ∠CBX আঁক ; এবং ইহার বাহু হইতে $BC = a$, এবং $BX = c - b$ কাটিয়া লও। CX যোগ কর। CX এর লম্বদ্বিখণ্ডক রেখা আঁক। BX কে বর্ধিত করিয়া লম্ব দ্বিখণ্ডককে A বিন্দুতে ছেদ কর। AC যোগ কর ; △ABC নির্ণেয় ত্রিভুজ হইবে।

চিত্র ১৫৫

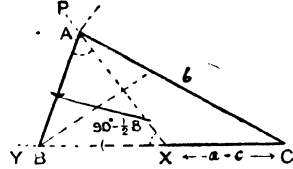
৬। ত্রিভুজের একটি কোণ B, কোণ সংলগ্ন বাহুদ্বয়ের সমষ্টি $(c+a)$ এবং ঐ কোণের বিপরীত বাহু b দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

($c+a$) এর সমান CD রেখা লও ; $\angle CDX = \frac{1}{2}B$ অঙ্কিত কর ; C কে কেন্দ্র করিয়া b একক ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত চাপ DX কে A বিন্দুতে ছেদ কর ; $\angle DAB = \frac{1}{2}B$ করিয়া আঁক। ABC নির্ণেয় ত্রিভুজ হইবে।

চিত্র ১৫৬

৭। ত্রিভুজের একটি কোণ B, ঐ কোণ সংলগ্ন বাহুদ্বয়ের অন্তর ফল $(a-c)$ এবং ঐ কোণের বিপরীত বাহু b দেওয়া আছে; ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

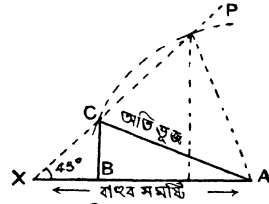
$a-c$এর সমান CX সরলরেখা টান; এবং CX কে Y বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত কর।

X বিন্দুতে $\angle YXP = 90^\circ - \frac{1}{2}B$ করিয়া কোণ আঁক।

Cকে কেন্দ্র করিয়া b একক ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ অঙ্কিত কর; মনে কর, এই বৃত্তচাপ XPকে A বিন্দুতে ছেদ করে। AX এর লম্ব দ্বিখণ্ডক রেখা অঙ্কিত কর; ধর, ইহা XY কে B বিন্দুতে ছেদ করে। AB যোগ কর। $\triangle ABC$ নির্ণেয় ত্রিভুজ হইবে।

চিত্র ১৫৭

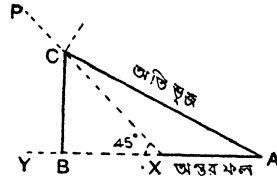
৮। সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও অপর বাহু দুইটির সমষ্টি দেওয়া আছে; ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

(Given the hypotenuse and the sum of the two sides, to construct the right-angled triangle.)

বাহুদ্বয়ের সমষ্টির সমান দীর্ঘ AX সরলরেখা লও। X বিন্দুতে $\angle AXP = 45^\circ$ করিয়া আঁক; Aকে কেন্দ্র করিয়া অতিভুজ ব্যাসার্ধ লইয়া বৃত্তচাপ অঙ্কিত কর; এই বৃত্তচাপ XP কে C বিন্দুতে ছেদ করে। C হইতে AX এর উপর CB লম্ব টান। $\triangle$ ACB নির্ণেয় ত্রিভুজ হইবে; ইহার $\angle B = 90^\circ$।

চিত্র ১৫৮

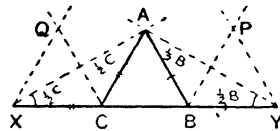
৯। সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও অপর বাহুদ্বয়ের অন্তরফল দেওয়া আছে; ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

(Given the hypotenuse and the difference of the other two sides, to construct the right-angled triangle.)

বাহুদ্বয়ের অন্তর ফলের সমান দীর্ঘ AX রেখা টান এবং ইহাকে Y পর্যন্ত বর্ধিত কর। X বিন্দুতে $\angle YXP = 45^\circ$ করিয়া আঁক। A কে কেন্দ্র করিয়া অতিভুজ ব্যাসার্ধ লইয়া বৃত্ত অঙ্কিত কর। মনে কর, এই বৃত্ত XP কে C বিন্দুতে ছেদ করে। C হইতে AY এর উপর CB লম্ব টান। $\triangle ABC$ নির্ণেয় ত্রিভুজ হইবে; ইহার $\angle B = 90^\circ$।

চিত্র ১৫৯

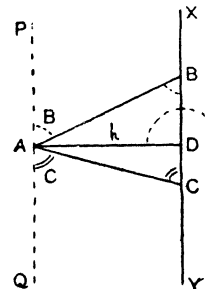
১০। ত্রিভুজের পরিসীমা ($a+b+c$) এবং দুইটি কোণ ($\angle B$ ও $\angle C$) দেওয়া আছে; ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

(Given the perimeter and two angles, to construct the triangle.)

$a+b+c$ র সমান XY সরলরেখা লও। X বিন্দুতে $\angle YXQ = \angle C$ এবং Y বিন্দুতে $\angle XYP = \angle B$ আঁক। প্রত্যেকটি কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত কর; মনে কর, সমদ্বিখণ্ডক রেখাদ্বয় A বিন্দুতে ছেদ করে। AX ও AY এর লম্বদ্বিখণ্ডক রেখা দুইটি টান; মনে কর, ইহারা XY কে C ও B বিন্দুতে ছেদ করে; AC ও AB যোগ কর। $\triangle ABC$ নির্ণেয় ত্রিভুজ হইবে।

চিত্র ১৬০

১১। ABC ত্রিভুজের দুই কোণ B ও C এবং A বিন্দু হইতে BC বাহুর দূরত্ব (h) দেওয়া আছে; ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

h এর সমান AD-রেখা টান। D বিন্দুতে AD উপর XDY লম্ব টান। A বিন্দুর ভিতর দিয়া XDY এর সহিত সমান্তরাল PAQ রেখা টান। A বিন্দুতে $\angle PAB$ ($= \angle B$) এবং $\angle QAC$ ($= \angle C$) অঙ্কিত কর; মনে কর, এই কোণের বাহুদ্বয়, XY কে যথাক্রমে B ও C বিন্দুতে ছেদ করে।

$\triangle ABC$ নির্ণেয় ত্রিভুজ হইবে।

চিত্র ১৬১

১২। AB সরলরেখাস্থিত X একটি বিন্দু, O ইহার বহিঃস্থ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু; AB রেখার উপর এমন একটি বিন্দু Q নির্দেশ কর যেন OQ+QX একটি নির্দিষ্ট রেখার সমান দীর্ঘ হয়।

(ইহা সম্ভব হইলে OQ+QX = অন্ততঃ কত হওয়া চাই ?)

১৩। একটি সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কিত কর যাহার একটি বাহু, এবং অতিভুজ ও আর একটি বাহুর সমষ্টি দেওয়া আছে।

১৪। একটি সমকোণী ত্রিভুজের একটি বাহু 4″, সমকোণ হইতে অঙ্কিত মধ্যমা 2·5″, ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

১৫। একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত কর, যাহার শিরঃকোণ ভূমিস্থ কোণের প্রত্যেকটির চতুর্গুণ এবং যাহার ভূমি 5″ দীর্ঘ।

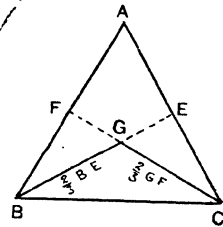
১৬। সমবাহু ত্রিভুজের উচ্চতা দেওয়া থাকিলে ত্রিভুজটি কিরূপে আঁকিবে ?

১৭। শিরঃকোণ ও উচ্চতা দেওয়া থাকিলে সমদ্বিবাহু ত্রিভুজটি কিরূপে আঁকিবে ?

১৮। একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত কর, যাহার পরিসীমা এবং উচ্চতা দেওয়া আছে।

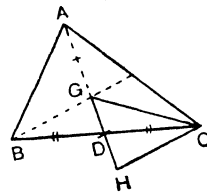
১৯। একটি ত্রিভুজের একটি বাহু এবং অপর দুইটি বাহুর সমদ্বিখণ্ডক মধ্যমা দুইটি দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

(Given one side, and the medians which bisect the other two sides ; construct the triangle)

BC বাহু ও মধ্যমা দুইটির প্রত্যেকটির $\frac{2}{3}$ অংশ লইয়া BGC ত্রিভুজ অঙ্কিত কর। BG কে E পর্যন্ত বর্ধিত কর, যেন GE = $\frac{1}{2}$BG এবং CG কে F পর্যন্ত বর্ধিত কর যেন GF = $\frac{1}{2}$CG হয়। BF ও CE যোগ করিয়া বর্ধিত কর, মনে কর, ইহারা A বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করে। ABC নির্ণেয় ত্রিভুজ হইবে।

চিত্র ১৬২

২০। একটি ত্রিভুজের তিনটি মধ্যমা দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

(Given the lengths of medians, construct the triangle)

মধ্যমা তিনটির $\frac{2}{3}$ অংশ লইয়া CGH ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর। GH এর মধ্যবিন্দু D স্থির কর। CD যোগ করিয়া B পর্যন্ত বর্ধিত কর, যেন DB = DC হয়। HGকে A পর্যন্ত বর্ধিত কর, যেন GA = HG হয়। AB ও AC যোগ কর। ABC নির্ণেয় ত্রিভুজ হইবে।

চিত্র ১৬৩

৬১। জ্যামিতিক অনুশীলন সমাধানের কয়েকটি সাধারণ ইঙ্গিত

জ্যামিতিক প্রশ্নে সাধারণত নিম্ন বিষয়গুলি প্রমাণ করিতে হয়—

(১) দুইটি সরলরেখার সমতা ;
(২) দুইটি কোণের সমতা ;
(৩) একটি কোণ সমকোণ কি না তাহা ;
(৪) তিনটি বিন্দুর একরেখীয়তা ; ইত্যাদি।

এই বিষয়গুলি প্রমাণ করিতে হইলে ত্রিভুজদ্বয়ের সর্বসমতা বিষয়ক উপপাদ্যগুলি (উপ. ৪, ৭, ১৭ ও ১৮) অথবা সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ধর্মবিষয়ক উপপাদ্য (উপ. ৫ ও ৬) গুলির সাহায্য লইতে হয়। যে দুইটি অঙ্গ সমান প্রমাণ করিতে হইবে তাহা কোন দুইটি ত্রিভুজে আছে কিনা অঙ্কিত চিত্রে তাহার অনুসন্ধান করিয়া ইহাদের সর্বসমতা প্রতিপন্ন করিবার চেষ্টা করিতে হইবে। তিনটি বিন্দুর একরেখীয়তা প্রমাণ করিতে হইলে, সাধারণত মধ্যবিন্দুস্থ কোণ সরলকোণ কিনা পরীক্ষা করিতে হয়। কোন একটি কোণ সমকোণ কিনা প্রমাণ করিতে হইলে, কখনও কখনও দেখিতে হয় যে, ঐ কোণটি কোন ত্রিভুজের একটি কোণ কিনা, এবং ঐ ত্রিভুজের অপর দুইটি কোণের সমষ্টি ঐ কোণের সহিত সমান কিনা।

বিবিধ অনুশীলনী (১)

ক

১। ABCD একটি বর্গক্ষেত্র। AB ও BCর উপর যথাক্রমে P ও Q এমন দুইটি বিন্দু যে AP = BQ। প্রমাণ কর যে, AQ ও DP পরস্পর লম্ব।

২। ABCD একটি বর্গক্ষেত্র। ইহার অন্তরস্থ P এমন একটি বিন্দু যে ∠CPB= এক সমকোণ এবং CP>BP। D বিন্দু হইতে CPর উপর একটি লম্ব টান। মনে কর ইহা CPকে Q বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে CP=DQ।

৩। ABCDE একটি সুষম পঞ্চভুজ। CD বাহুর মধ্যবিন্দু P। প্রমাণ কর AP, CDর উপর লম্ব।

৪। ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ। ইহার অন্তরস্থ O একটি বিন্দু। OCর উপর একটি সমবাহু ত্রিভুজ OQC এমন ভাবে অঙ্কিত কর যেন OQ বাহু ACকে ছেদ করে, কিন্তু BCকে ছেদ করে না। প্রমাণ কর যে AQ=BO।

৫। ABCD একটি বর্গক্ষেত্র। ইহার কর্ণ AC হইতে AE (=AB) কাটিয়া লও। AC উপর PEQ একটি লম্ব; ইহা BCকে P বিন্দুতে এবং DCকে Q বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর ∠PAQ=45°।

৬। ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ; ইহার AB=AC। BAকে D পর্যন্ত বর্ধিত কর যেন AD=AB হয়। প্রমাণ কর যে △BCD একটি সমকোণী ত্রিভুজ।

৭। ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ। BC ও CA এর উপর দুইটি সমবাহু ত্রিভুজ BCF ও ACG অঙ্কিত। প্রমাণ কর যে G, C ও F একরেখীয়।

৮। ABCD একটি সামান্তরিক। CBকে G পর্যন্ত বর্ধিত কর যেন BP=AB হয়। CDকে Q পর্যন্ত বর্ধিত কর যেন DQ=AD হয়। প্রমাণ কর যে, P, A, Q একরেখীয়।

৯। ABC একটি ত্রিভুজ এবং BE ইহার একটি মধ্যমা। A বিন্দুর ভিতর দিয়া BEর সহিত সমান্তরাল একটি সরলরেখা, বর্ধিত CBকে P বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর AP= 2BE।

১০। কোন ত্রিভুজের তিনটি মধ্যমার সমষ্টির চারিগুণ ইহার পরিসীমার তিনগুণ অপেক্ষা বৃহত্তর। প্রমাণ কর।

খ

১১। ABC একটি ত্রিভুজ এবং D, BC বাহুর মধ্যবিন্দু। ABর সহিত সমান্তরাল DP সরলরেখা ∠Bএর সমদ্বিখণ্ডক রেখাকে P বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর ∠BPC= এক সমকোণ

১২। AB রেখার একদিকে ABCDE সুষম পঞ্চভুজ এবং অপরদিকে ABC′D′E′F′ সুষম ষড়ভুজ অঙ্কিত। যদি C′B ও CD উভয়ে বর্ধিত হইয়া P বিন্দুতে ছেদ করে, প্রমাণ কর CC′=CP।

১৩। ABCDEF একটি সুষম ষড়ভুজ। ইহার কর্ণগুলি টানিলে যে চিত্রটি উৎপন্ন হয় তাহাতে কতগুলি সমকোণী ত্রিভুজ আছে নির্দেশ কর।

১৪। ABC একটি ত্রিভুজ; ∠B ও ∠Cএর সমদ্বিখণ্ডক রেখাদ্বয় I বিন্দুতে ছেদ করে। I বিন্দুর ভিতর দিয়া অঙ্কিত BCর সমান্তরাল রেখা AB ও ACকে X ও Y বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর XY=BX+CY।

১৫। পূর্ব প্রশ্নে যদি ∠BIC=135° হয়, তবে ∠A কত ডিগ্রি?

১৬। একটি কুব্জ বহুভুজের দুইটি কোণের প্রত্যেকটি সমকোণ এবং অপর কোণগুলির প্রত্যেকটির পরিমাণ 120°। বহুভুজের কতগুলি বাহু আছে?

১৭। একটি সুষম 15-ভুজের A, B, C, D পর পর চারিটি শীর্ষবিন্দু। $\angle ACB$, $\angle ACD$ ও $\angle ADC$ এর পরিমাণ কত?

১৮। ABCDEF একটি কুব্জ ষড়ভুজ। ইহার $\angle A = \angle C = \angle E$ এবং $\angle B = \angle D = \angle F$; $\angle A$ ও $\angle C$এর অন্তর্দ্বিখণ্ডক রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত সূক্ষ্মকোণের পরিমাণ কত ডিগ্রি?

১৯। OAB ও OCD দুইটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের উভয়ের শীর্ষবিন্দু O স্থিত কোণ দুইটি সমান। প্রমাণ কর যে, হয় $AC = BD$ অথবা $AD = BC$।

২০। ABCD একটি সামান্তরিক। AB, BC, CD এবং DA কে যথাক্রমে L, M, N ও P বিন্দুতে খণ্ডিত করা হইল। যদি $BL = CM = DN = AP$ হয়, তবে প্রমাণ কর LMNP একটি সামান্তরিক।

গ

২১। ABC ত্রিভুজের $AB = 9$ সে. মি., $BC = 12$ সে. মি. এবং $\angle B = 90^\circ$; ABর মধ্যবিন্দু X হইতে অঙ্কিত XY, ACর উপর লম্ব। $PQ =$ কত সে. মি.?

২২। প্রমাণ কর যে, একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহুর মধ্যবিন্দু সংযোজক সরল রেখা, তৃতীয় বাহুর মধ্যবিন্দুগামী মধ্যমাদ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

২৩। ABCD একটি সামান্তরিক। ADর উপর ADEF ও ABর উপর ABGH দুইটি বর্গক্ষেত্র বহির্দিকে অঙ্কিত। প্রমাণ কর $FH = AC$।

২৪। ABCD একটি কুব্জ চতুর্ভুজ; ইহার $AB =$ কর্ণ AC। প্রমাণ কর, $BD > CD$।

২৫। কোন ত্রিভুজের বাহুগুলি অসমান হইলে ইহার শিরঃকোণের দ্বিখণ্ডক রেখা, শীর্ষ হইতে ভূমির উপর অঙ্কিত মধ্যমা ও লম্বের মধ্যে অবস্থিত হয়।

২৬। যদি কোন ত্রিভুজের দুইটি মধ্যমা সমান হয়, তবে ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু হইবে।

২৭। ABC ত্রিভুজের $\angle B = 2\angle C$ এবং $\angle A = 90^\circ$, প্রমাণ কর, $AC < 2AB$।

২৮। কোন ত্রিভুজের একবাহুর মধ্যবিন্দু ও তদ্বিপরীত কৌণিকবিন্দুর সংযোজক রেখা ঐ বাহুর অর্ধেকের সমান, তদপেক্ষা বৃহত্তর অথবা ক্ষুদ্রতর হইলে, ঐ কোণটি যথাক্রমে সমকোণ, সূক্ষ্মকোণ অথবা স্থূলকোণ হইবে।

২৯। কোন ত্রিভুজের শিরঃকোণের বহির্দ্বিখণ্ডক রেখা যদি ভূমির সহিত 10° কোণ করে, তবে ঐ ত্রিভুজের ভূমিস্থ কোণের অন্তরফল কত হইবে?

৩০। কোন্ কোন্ সুষমক্ষেত্র একটি শীর্ষবিন্দুতে মিলিত হইলে ইহার চতুষ্পার্শ্বস্থ সমতলক্ষেত্র সম্পূর্ণরূপে পরিবেষ্টিত হইবে?

ঘ

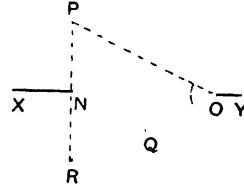
৩১। A হইতে B 4 মাইল দক্ষিণে অবস্থিত। A হইতে একখানি গাড়ী ঘণ্টায় 3 মাইল বেগে পূর্বদিকে যাইতেছে এবং B হইতে আর একখানি গাড়ী ঘণ্টায় 5 মাইল বেগে উত্তর-পূর্বদিকে

যাইতেছে। চিত্র আঁকিয়া দেখাও, কত সময়ে, এবং A ও B হইতে কতদূরে, তাহাদের পরস্পর সাক্ষাৎ হইবে ?

৩২। PQ ও RS দুইটি সোজাপথ পরস্পর 30° কোণে A বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। আর একটি সোজা পথ ঐ দুইটি পথকে Q ও S বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। একটি মন্দির ঐ দুইটি পথ হইতে সমান দূরে এবং তৃতীয় পথ হইতে 100 গজ দূরে অবস্থিত। মন্দিরটির অবস্থান নির্ণয় কর।

৩৩। একটি নির্দিষ্ট বিন্দুর ভিতর দিয়া এমন একটি সরলরেখা অঙ্কিত করিতে হইবে যাহা দুইটি পরস্পরচ্ছেদী স্থির সরলরেখার সহিত সমাণ কোণ উৎপন্ন করিবে।

৩৪। XY একটি সরলরেখা এবং P ও Q ইহার দুইপার্শ্বে অঙ্কিত দুইটি বিন্দু। XYএর উপর এমন একটি বিন্দু O স্থির কর যাহাতে $\angle POX = \angle QOX$ হয়।

XY এর উপর PN লম্ব টান এবং PN কে বর্ধিত করিয়া NR=PN কর। RQ যোগ করিয়া ইহাকে বর্ধিত কর যেন ইহা XY কে O বিন্দুতে ছেদ করে। $\angle QOX = \angle POX$ হইবে।

চিত্র ১৬৪

৩৫। LM সরলরেখার একই পার্শ্বে A ও B দুইটি বিন্দু। LM স্থিত এমন একটি বিন্দু P নির্দেশ কর যাহাতে $\angle APL = \angle BPM$ হয়।

৩৬। AB একটি সরলরেখা এবং P ইহার বহিঃস্থ একটি বিন্দু। Pএর ভিতর দিয়া এমন একটি সরলরেখা টানিতে হইবে যাহা AB কে একটি নির্দিষ্ট কোণে ছেদ করিবে।

(AB সরলরেখার B বিন্দুতে নির্দিষ্ট পরিমাণ কোণ ABX অঙ্কিত কর। এবং BX এর সহিত সমান্তরাল একটি সরলরেখা P বিন্দুর ভিতর দিয়া অঙ্কিত কর। এই সরলরেখা AB কে নির্দিষ্ট কোণে ছেদ করিবে)

৩৭। তিনটি বিন্দুর ভিতর দিয়া এমন তিনটি সরলরেখা টানিতে হইবে যেন ইহাদের পরস্পর ছেদে একটি সমবাহু ত্রিভুজ উৎপন্ন হয়।

[মনে কর, P, Q ও R তিনটি বিন্দু ; R বিন্দুর ভিতর দিয়া যে কোন সরলরেখা টান। ৩৬ প্রশ্ন অনুযায়ী P বিন্দুর ভিতর দিয়া এমন ভাবে APX রেখাটি টান যেন $\angle RAX = 60^\circ$ হয়। AX=AY কাটিয়া লও। Q বিন্দুর ভিতর দিয়া XYর সমান্তরাল রেখা টান ; ইহা AX ও AY কে যথাক্রমে B ও C বিন্দুতে ছেদ করিবে। $\triangle ABC$ সমবাহু ত্রিভুজ হইবে।]

৩৮। চারিটি নির্দিষ্ট বিন্দুর (কোন তিনটিই একরেখীয় নয়) মধ্য দিয়া সরলরেখা টানিয়া একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর।

৩৯। একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত কর যাহার ভূমি, এবং শিরঃকোণ ও ভূমিস্থ একটি কোণের সমষ্টি দেওয়া আছে।

৪০। একটি বাহু এবং ইহা হইতে বিপরীত বাহুর দূরত্ব দেওয়া আছে ; রম্বসটি অঙ্কিত কর।

ঙ

৪১। তিনটি সরলরেখা এক বিন্দুতে মিলিত আছে। এমন একটি সরলরেখা অঙ্কিত কর যাহার এই তিনটি রেখাদ্বারা কর্তিত অংশগুলি পরস্পর সমান হইবে।

৪২। ত্রিভুজের একটি বাহুতে এমন একটি বিন্দু নির্দেশ কর যাহার ভিতর দিয়া অপর বাহুদ্বয়ের সমান্তরাল এবং ইহা দ্বারা সীমাবদ্ধ সরলরেখা দুইটি সমান হইবে।

৪৩। ত্রিভুজের ভূমি ও তৎপ্রান্তদ্বয় হইতে অপর বাহুদ্বয়ের দূরত্ব দেওয়া আছে; ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

৪৪। একটি ত্রিভুজের ভূমি (base), ভূমিস্থ কোণদ্বয়ের অন্তরফল (difference of the base angles) এবং অপর বাহুদ্বয়ের অন্তরফল (difference of the other two sides) প্রদত্ত আছে; ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

[ভূমি=BC, ∠CBD=ভূমিস্থ কোণদ্বয়ের অন্তরফলের অর্ধেক এবং CD= বাহুদ্বয়ের অন্তরফল, এই তিনটি বিষয়দ্বারা ΔBCD অঙ্কিত কর। B বিন্দু হইতে BD র যে দিকে BC সেই দিকে BE রেখা টানিয়া ∠CDB র সমান করিয়া ∠EBD অঙ্কিত কর। BE ও DC পরস্পর A বিন্দুতে ছেদ কবিলে, ABC নির্ণেয় ত্রিভুজ হইবে]

৪৫। একটি ত্রিভুজের ভূমি (base), ভূমিস্থ কোণদ্বয়ের অন্তরফল (difference of the base angles) এবং অপর দুইটি বাহুব সমষ্টি (sum of the other two sides) প্রদত্ত আছে; ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

৪৬। এমন একটি রম্বস্ ABCD অঙ্কিত কর যেন ইহার কর্ণ AC একটি নির্দিষ্ট সরল রেখার উপর থাকে, এবং AB, BC ও CD এই তিনটি বাহু তিনটি নির্দিষ্ট বিন্দুর ভিতর দিয়া অতিক্রম করে।

৪৭। এক রেখীয় নয় এমন তিনটি নির্দিষ্ট বিন্দু X, Y ও Z। একটি ত্রিভুজ ABC এমন ভাবে অঙ্কিত কর যেন X ও Y যথাক্রমে AB ও AC বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু হয় এবং A হইতে BCর উপর লম্ব টানিলে ইহা BC কে Z বিন্দুতে ছেদ করে।

৪৮। ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ এবং ADEF একটি রম্বস্, ত্রিভুজের বাহুগুলি ও রম্বসের বাহুগুলি পরস্পর সমান। ত্রিভুজটি রম্বসের ভিতর এমনভাবে অঙ্কিত যে B বিন্দু DEর উপর এবং C বিন্দু EFর উপর অবস্থিত। রম্বসের কোণগুলির পরিমাণ নির্ণয় কর।

৪৯। AB একটি নির্দিষ্ট সরল রেখা এবং O ইহার বহিঃস্থ একটি স্থির বিন্দু। Q AB স্থিত একটি চল বিন্দু। OQ এর উপর ইহার একই দিকে OPQ সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত হইলে, P বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

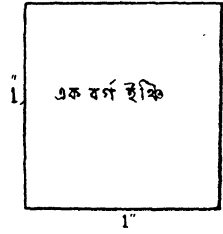
৫০। O একটি স্থির বিন্দু, এবং Q একটি নির্দিষ্ট বৃত্তের যে কোন বিন্দু। OQ উপর ইহার একই দিকে OQP সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত হইলে, P বিন্দুর সঞ্চারপথ কি হইবে?

দ্বিতীয় খণ্ড

প্রথম অধ্যায়

ঋজুরেখক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

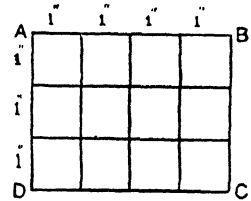
৬২। **সংজ্ঞা।** কোন ক্ষেত্রের বাহুগুলিদ্বারা সীমাবদ্ধ সমতলের পরিমাণকে ইহার **ক্ষেত্রফল** বা **কালি** (Area) বলে।

কোন এক ইঞ্চি দীর্ঘ বাহুবিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রের পরিমাণ **এক বর্গ ইঞ্চি** (Square Inch), এবং কোন এক সেন্টিমিটর দীর্ঘ বাহুবিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রের পরিমাণ **এক বর্গ সেণ্টিমিটর**।

এইরূপ এক বর্গ ইঞ্চি, এক বর্গফুট, এক বর্গগজ প্রভৃতি নির্দিষ্ট ক্ষেত্রফলের পরিমাণকে ক্ষেত্রফলের **একক** ধরা যাইতে পারে।

চিত্র ১৬৫

একটি বর্গক্ষেত্রের বাহু যদি একক হয় তবে ইহার কালি **এক বর্গ একক** (Sq. Unit) হইবে।

৬৩। **আয়তক্ষেত্রের কালি**

ABCD একটি আয়তক্ষেত্র; ইহার AB = 4″ এবং AD = 3″। AB কে সমান চারিভাগে এবং AD কে সমান তিনভাগে বিভক্ত করিয়া সমান্তরাল রেখা টানিলে ABCD আয়তক্ষেত্র সমান সমান বারটি বর্গক্ষেত্রে বিভক্ত হয় এবং প্রত্যেক বর্গক্ষেত্রের বাহুর পরিমাণ এক ইঞ্চি হওয়ায় ইহার কালি এক বর্গ ইঞ্চি। অতএব, আয়তক্ষেত্রের কালি $= 3 \times 4 = 12$ বর্গইঞ্চি

চিত্র ১৬৬

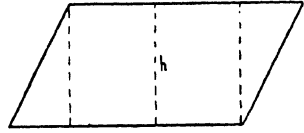
এইরূপে যদি কোন আয়ত ক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য a একক এবং প্রস্থ b একক হয়, তবে ইহার কালি $a \times b$ বর্গ একক হইবে। সুতরাং,

আয়তক্ষেত্রের কালি = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ

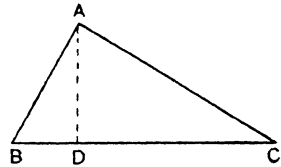
অতএব, দেখা যাইতেছে যে,

(১) যে সকল আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ সমান তাহাদের কালিও সমান হইবে; এবং (২) যে সকল আয়তক্ষেত্রের কালি সমান এবং দৈর্ঘ্য অথবা প্রস্থ সমান, তাহাদের যথাক্রমে প্রস্থ অথবা দৈর্ঘ্য সমান হইবে।

৬৪। **উচ্চতা বা উন্নতি** (Altitude)

কোন সামান্তরিকের একটি বাহুকে ইহার **ভূমি** (Base) ধরিলে, ইহা হইতে ইহার বিপরীত বাহুর দূরত্বকে ইহার **উচ্চতা বা উন্নতি** (Altitude) বলে। চিত্রে h সামান্তরিকের উন্নতি।

চিত্র ১৬৭

কোন ত্রিভুজের কোন বাহুকে ভূমি ধরিলে ইহার বিপরীত শীর্ষবিন্দু হইতে অঙ্কিত লম্বকে ত্রিভুজের উচ্চতা বা উন্নতি বলে।

চিত্রে ABC ত্রিভুজের BC ভূমি এবং A হইতে BCর উপর অঙ্কিত লম্ব ADর দৈর্ঘ্য হইল ইহার উচ্চতা বা উন্নতি।

চিত্র ১৬৮

ত্রিভুজের যে কোন বাহুকে ভূমি ধরা যাইতে পারে বলিয়া ইহার উচ্চতা তিনটি।

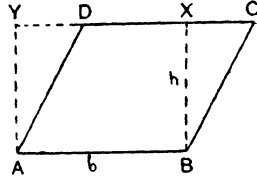
দ্রষ্টব্য। লম্ব পরিমাণ দ্বারা দূরত্ব সূচিত হইয়া থাকে।

প্রশ্ন ১। একখানি লেখ কাগজে নিম্নলিখিত বিন্দুগুলির অবস্থান নির্ণয় কর—(০, ৩), (৫, ০), (−২, −৪), (৭, ৩)। বর্গক্ষেত্র গণনা করিয়া যে চতুর্ভুজটি হইল তাহার কালি নির্দেশ কর।

প্রশ্ন ২। লেখ-কাগজে অঙ্কিত (০,০), (৬, ০), (২, ৪), (৮, ৪) বিন্দুগুলি সংযুক্ত করিলে কি একটি সামান্তরিক হইবে? যদি হয় তবে উহার দুইটি উচ্চতা কত একক হইবে?

প্রশ্ন ৩। একটি ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (৩,৪), (১, −৫), (২, −৩); ত্রিভুজটির তিনটি উচ্চতার পরিমাণ কত? কালি কত বর্গ একক?

অনু. ১। যদি একটি সামান্তরিকের ভূমি b একক দীর্ঘ এবং উচ্চতা h একক হয়, তবে ইহার কালি $b.h$ বর্গ একক হইবে।

ABCD সামান্তরিকের AB $= b$ একক এবং ইহার উচ্চতা BX $= h$ একক। ABXY আয়তক্ষেত্রটি অঙ্কিত কর। এখন, ABCD ও ABXY উভয় সামান্তরিকের একই ভূমি AB ও একই উচ্চতা h হওয়ায় উভয়ে একই সমান্তরাল সরলরেখা AB ও CY এর মধ্যে অবস্থিত।

চিত্র ১৭১

সুতরাং ▭ABCD = আয়তক্ষেত্র ABXY = AB.BX = $b.h$ বর্গ-একক।

অনু. ২। সমান সমান ভূমি ও সমান সমান উচ্চতা বিশিষ্ট যাবতীয় সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল পরস্পর সমান।

[Parallelograms on equal bases and of equal altitudes are equal in area. Euc. 1. 36.]

ইহা সহজসিদ্ধ; কারণ, প্রত্যেকটি সামান্তরিকের কালি = ভূমি × উচ্চতা।

অনুশীলনী ৩০

১। কোন সামান্তরিকের ভূমি $= 3{\cdot}5''$ ও উচ্চতা $= 1{\cdot}6''$; ইহার ক্ষেত্রফল কত ?

২। একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য $= 16''$ ও প্রস্থ $= 4''$; ইহার সমান একটি বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য কত ?

৩। ABCD একটি সামান্তরিক অঙ্কিত কর যাহার BC $= 4{\cdot}2''$, CD $= 3{\cdot}8''$ এবং $\angle$B $= 60^\circ$; (১) AB কে ভূমি ধরিয়া ইহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর, (২) BC কে ভূমি ধরিয়া ইহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর, এবং দুইটি ক্ষেত্রফলের গড় নির্ণয় কর।

৪। একটি সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় $5''$ ও $6''$ এবং ইহাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ 60° ; সামান্তরিকটি অঙ্কিত করিয়া ইহার কালি নির্ণয় কর।

৫। কোন সামান্তরিকের একটি বাহুর উপর ইহার সমান একটি রম্বস অঙ্কিত কর।

[On a side of a parallellogram construct a rhombus equal to it in area.]

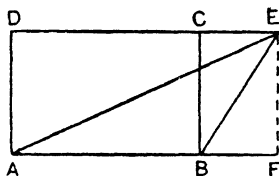
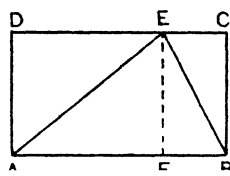
৬। একটি সামান্তরিকের দুইটি বাহু যথাক্রমে $7{\cdot}2$ সেঃ মিঃ ও 5 সেঃ মিঃ এবং ইহার ক্ষুদ্রতর উচ্চতা 3 সেঃ মিঃ। ইহার বৃহত্তর উচ্চতা কত ?

৭। তিন ইঞ্চি বাহুবিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্রের সমান $3{\cdot}6''$ বাহুবিশিষ্ট একটি রম্বস অঙ্কিত কর।

৮। ABCD, ACDQ দুইটি সামান্তরিক। △ADQ, QBCD ক্ষেত্রের কত অংশ ?

উপপাদ্য ২৫ (Theorem 25)

একটি ত্রিভুজ ও একটি আয়তক্ষেত্র একই ভূমির উপর অবস্থিত হইলে এবং উভয়ের একই উচ্চতা হইলে, ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক হইবে।

[If a triangle and a rectangle be on the same base and have the same altitude, then the area of the triangle is half that of the rectangle.]

(১) চিত্র ১৭২ (২)

ABE ত্রিভুজ ও ABCD আয়তক্ষেত্রটি একই ভূমি ABর উপর অবস্থিত এবং ইহাদের একই উচ্চতা EF।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$\triangle ABE = \frac{1}{2} \square ABCD \text{।}$$

প্রমাণ। $\because$ $EF \perp AB$

$\therefore$ AFED ও BFEC উভয়েই আয়তক্ষেত্র।

কিন্তু, প্রত্যেক আয়তক্ষেত্রই ইহার কর্ণ দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হয়,

$\therefore$ $\triangle AFE = \frac{1}{2} \square AFED$

এবং $\triangle BFE = \frac{1}{2} \square BFEC$ ।

প্রথম চিত্রে, $\triangle AFE - \triangle BFE = \frac{1}{2}(AFED - BFEC)$;

$\therefore$ $\triangle ABE = \frac{1}{2} \square ABCD$ ।

দ্বিতীয় চিত্রে, $\triangle AFE + \triangle BFE = \frac{1}{2}(AFED + BFEC)$;

$\therefore$ $\triangle ABE = \frac{1}{2} \square ABCD$ ।

অনু. ১। একটি ত্রিভুজ ও একটি সামান্তরিক একই ভূমির উপর অবস্থিত হইলে এবং উভয়ের একই উচ্চতা হইলে, ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক হইবে।

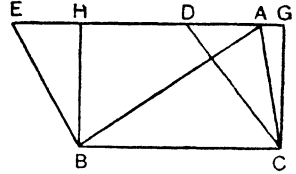
১৭৩ চিত্রে, $\triangle ABC$

$= \frac{1}{2}$ আয়তক্ষেত্র CGHB।

কিন্তু, আয়তক্ষেত্র CGHB

= সামান্তরিক CDEB।

$\therefore$ $\triangle ABC$

$= \frac{1}{2}$ সামান্তরিক CDEB।

চিত্র ১৭৩

অনু. ২। যে সকল ত্রিভুজের ভূমি পরস্পর সমান এবং উচ্চতাও পরস্পর সমান তাহাদের ক্ষেত্রফলও পরস্পর সমান হইবে।

অনু. ৩। যে সকল ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল সমান, তাহাদের উচ্চতা সমান হইলে ভূমি সমান হইবে ; এবং ভূমি সমান হইলে, উচ্চতাও সমান হইবে।

৬৬। ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

ABE একটি ত্রিভুজ এবং EF ইহার উচ্চতা (১৭২ চিত্র দেখ)

$\triangle ABE = \frac{1}{2} \times$ আয়ত $ABCD = \frac{1}{2}.\ AB.EF$।

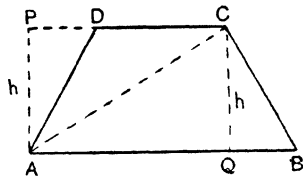
যদি $AB = b$ একক এবং $EF = h$ একক হয়, তবে

$\triangle ABE = \frac{1}{2}.\ b.\ h$ বর্গ-একক ; অর্থাৎ

ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}.$ **ভূমি** $\times$ **উচ্চতা**।

৬৭। ট্রাপিজিয়মের ক্ষেত্রফল

১৭৪ চিত্রে ABCD একটি ট্রাপিজিয়ম ; ইহার $AB \parallel CD$।

AC যোগ কর ; এবং A ও C হইতে CD ও ABর উপর যথাক্রমে AP ও CQ লম্বপাত কর।

চিত্র ১৭৪

যেহেতু, $AB \parallel CD$, $\therefore$ $AP = CQ = h$ একক (মনে কর)।

ট্রাপিজিয়ম $ABCD = \triangle ACD + \triangle ACB$

$= \frac{1}{2}.CD.AP + \frac{1}{2}AB.CQ$

$= \frac{1}{2}.CD.\ h + \frac{1}{2}.\ AB.\ h = \frac{1}{2}(CD + AB).\ h$।

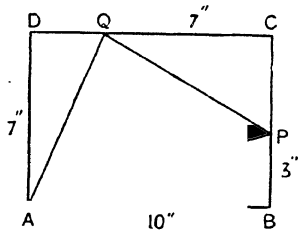
যদি $AB = a$ একক এবং $CD = b$ একক হয়, তবে

ABCD ট্রাপিজিয়মের ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}(a+b)h$ বর্গ-একক,

$=\frac{1}{2}$. **সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমষ্টি × উচ্চতা।**

অনুশীলনী ৩১

১। ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ ; ইহার $\angle A=90°$, $AB=3''$, $BC=5''$ ও $AC=4''$। ইহার কালি কত ? অতিভুজ BCকে ভুমি ধরিয়া ত্রিভুজের উচ্চতা নির্ণয় কর।

২। ABCD একটি আয়তক্ষেত্রের $AB=10''$ ও $AD=7''$। চিত্রে APQ ত্রিভুজটি কিরূপে আঁকা হইয়াছে দেখ। অতঃপর নিম্নলিখিত ত্রিভুজগুলির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর :— ΔABP, ΔCPQ, ΔADQ, ও ΔAPQ।

চিত্র ১৭৫

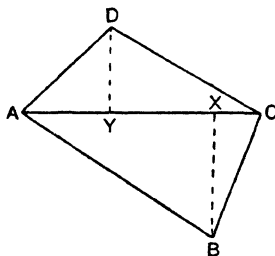
৩। তিন ইঞ্চি বাহুবিশিষ্ট একটি সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত করিয়া ইহার ক্ষেত্রফল মাপিয়া নির্ণয় কর।

৪। **চতুর্ভুজের কালি নির্ণয়**

১৭৬ চিত্রে ABCD একটি চতুর্ভুজ, AC কর্ণ টান। ধর, B ও D হইতে BX ও DY, ACর উপর লম্ব। (এই দুইটি লম্বকে অফসেট বলে)

$ABCD=\Delta ADC+\Delta ABC$

$=\frac{1}{2}AC.DY+\frac{1}{2}AC.BX$

$=\frac{1}{2}AC(DY+BX)$

চিত্র ১৭৬

৫। একটি ত্রিভুজের উচ্চতাত্রয়ের অনুপাত 10, 15, 24। ইহার বৃহত্তম বাহুটি $60''$ হইলে ক্ষুদ্রতম বাহুটি কত ?

৬। ABCD একটি ট্রাপিজিয়ম্; ইহার AB ‖ CD। ইহার কর্ণদ্বয় AC ও BD, O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। যদি $\Delta AOB=5$ বর্গইঞ্চি এবং $\Delta AOD=10$ বর্গইঞ্চি হয়, তবে ΔBOC ও ΔCODর ক্ষেত্রফল কত হইবে ?

৭। ABCD একটি আয়তক্ষেত্র। ইহার $AB=7\cdot2$ সেঃ মিঃ, $BC=5$ সেঃ মিঃ। P, Q, ABর উপর দুইটি বিন্দু এবং R ও S, DCর উপর দুইটি বিন্দু এমন যে $AP=\cdot8$ সেঃ মিঃ, $QB=2$ সেঃ মিঃ, $DR=1\cdot2$ সেঃ মিঃ এবং $SC=1\cdot2$ সেঃ মিঃ। CDPQ এবং PQSR ক্ষেত্রদ্বয়ের কালি নির্ণয় কর।

অনুশীলনী ৩২

১। ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ ; ইহার $\angle A$ = সমকোণ। AX, BCর উপর লম্ব। প্রমাণ কর, $AX = \frac{AB.AC}{BC}$।

২। ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ। ইহার অভ্যন্তরস্থ একটি বিন্দু O। p, q, এবং r যথাক্রমে BC, CA ও AB বাহুর O বিন্দু হইতে দূরত্ব ; h ত্রিভুজের উচ্চতা। প্রমাণ কর $h = p + q + r$।

৩। ABC একটি ত্রিভুজ। XY সরলরেখা BCর সমান্তরাল এবং AB ও ACকে যথাক্রমে X ও Y বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ কর—(১) $\Delta BXC = \Delta BYC$
(২) $\Delta BXY = \Delta CXY$

এবং দেখাও, চিত্রে আর কোন্ কোন্ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল সমান।

৪। প্রমাণ কর যে কোন ত্রিভুজের মধ্যমা ইহাকে সমান দুইভাগে বিভক্ত করে। [The median of a triangle bisects it.]

৫। প্রমাণ কর যে কোন ত্রিভুজের দুইটি বাহুর মধ্যবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরল রেখা তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল।

৬। কোন ট্রাপিজিয়মের তির্য্যক বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরল রেখা ইহার সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমান্তরাল।

[The straight line which joins the middle points of the oblique sides of a trapezium is parallel to the other sides,]

৭। ABC একটি ত্রিভুজ। BCর উপর D একটি বিন্দু এমন যে BD=2DC। ΔABD, ABC ত্রিভুজের কত অংশ ?

৮। ABC একটি ত্রিভুজ। AD, BE ও CF ইহাদের মধ্যমাত্রয় G বিন্দুতে ছেদ করে। ΔBGD, ΔBGC এর এবং ΔABC এর কত অংশ ?

৯। ABCD একটি সামান্তরিক। ইহার কর্ণদ্বয় O বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর $\Delta AOB = \Delta BOC = \Delta COD = \Delta DOA$।

১০। ABCD একটি ট্রাপিজিয়ম ($AB \parallel CD$)। ইহার কর্ণদ্বয় O বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর $\Delta DOA = \Delta COB$।

১১। ABC একটি ত্রিভুজ এবং BCর মধ্যবিন্দু X। AX স্থিত Y যে কোন একটি বিন্দু। প্রমাণ কর $\Delta ABY = \Delta ACY$।

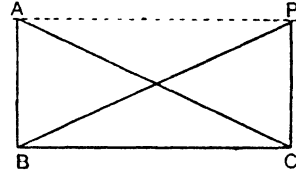
১২। ABCD একটি সামান্তরিক এবং AB কে P বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করা হইল। প্রমাণ কর $\Delta PCD = \Delta ADB$।

১৩। ABCD একটি সামান্তরিক এবং ইহার কর্ণদ্বয় O বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর O বিন্দুর মধ্য দিয়া অঙ্কিত যে কোন সরল রেখা সামান্তরিককে সমান দুই ভাগে বিভক্ত করে।

১৪। প্রমাণ কর যে কোন রম্বসের কর্ণদ্বয়ের গুণফলের অর্ধেক দ্বারা ইহার ক্ষেত্রফল ব্যক্ত করা যায়।

[The area of a rhombus is half the product of the diagonals.]

৬৮। ক্ষেত্রফল সংস্পৃষ্ট কয়েকটি সম্পাদ্য

ABC একটি স্থির নির্দিষ্ট ত্রিভুজ। P একটি বিন্দু BC বাহুর যেদিকে A অবস্থিত সেই দিকে এমন ভাবে চলিতেছে যে ইহার যে কোন অবস্থানে $\Delta PBC = \Delta ABC$ হইবে।

P বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় করিতে হইবে।

উপপাদ্য ২৬ হইতে বুঝা যায় যে AP সরলরেখা BC র সহিত সমান্তরাল হইবে; এবং

উপপাদ্য ২৭ হইতে বুঝা যায় যে APর উপর অবস্থিত প্রত্যেকটি বিন্দুই P এর অবস্থান হইতে পারে।

সুতরাং, A বিন্দুর ভিতর দিয়া BC র সহিত সমান্তরালভাবে অঙ্কিত সরল রেখাই P বিন্দুর **সঞ্চারপথ**।

দ্রষ্টব্য। ক্ষেত্রফল সংস্পৃষ্ট সম্পাদ্য সমাধানে এই সঞ্চারপথ বিশেষ আবশ্যক।

সম্পাদ্য ১৪ (Problem 14)

একটি ত্রিভুজ নির্দিষ্ট আছে ; এমন আর একটি সামান্তরিক অঙ্কিত করিতে হইবে যাহার ক্ষেত্রফল ঐ নির্দিষ্ট ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের সমান হইবে এবং যাহার একটি কোণ কোন নির্দিষ্ট কোণের সমান হইবে।

[Given a triangle ; to construct a parallelogram, equal in area to the given triangle, and, having one of its angles equal to a given angle.]

চিত্র ১৮০

ABC একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজ এবং D একটি নির্দিষ্ট কোণ। এমন একটি সামান্তরিক অঙ্কিত করিতে হইবে যাহার ক্ষেত্রফল $\triangle ABC$ এর ক্ষেত্রফলের সমান এবং যাহার একটি কোণ $\angle D$ এর সমান হইবে।

অঙ্কন। BC কে E বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর, এবং E বিন্দুতে EC এর সহিত $\angle D$ এর সহিত সমান করিয়া, $\angle CEF$ অঙ্কিত কর।

A বিন্দু হইতে BCর সমান্তরাল AF সরলরেখা টান, এবং মনে কর, ইহা $\angle CEF$ কোণের EF বাহুকে F বিন্দুতে ছেদ করে।

এখন, C বিন্দু হইতে EF সরলরেখার সমান্তরাল CG রেখা AF রেখাকে G বিন্দুতে ছেদ করিয়া অঙ্কিত কর।

CEFG-ই নির্ণেয় সামান্তরিক হইবে।

প্রমাণ। AE যোগ কর।

$\triangle ABE = \triangle ACE$ ($\because$ AE, $\triangle ABC$র মধ্যমা)

এবং $\square CEFG = 2\triangle ACE$ (সমভূমি EC এবং AG $\parallel$ EC)

$\therefore \square CEFG = \triangle ABC$,

এবং $\angle CEF = \angle D$ (অঙ্কন)।

প্রশ্ন। $\angle D$টি দেওয়া না থাকিলে সম্পাদ্যের সমাধান কিরূপ হইত ?

অনুশীলনী ৩৩

১। ABC একটি ত্রিভুজ। এমন যে কোন একটি সামান্তরিক অঙ্কিত কর যাহার ক্ষেত্রফল ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফলের (১) $\frac{2}{3}$ অংশ (২) অর্ধেক হইবে।

২। ABC ও DEF দুইটি ত্রিভুজ, যাহাদের AB = DE, AC = DF এবং অন্তর্ভূত ∠A ও ∠D পরস্পর সম্পূরক ; প্রমাণ কর যে ত্রিভুজ দুইটির ক্ষেত্রফল সমান।

ইহার সাহায্যে এমন একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত কর যাহার কালি একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের কালির সমান হইবে এবং যাহার একটি কোণ ঐ নির্দিষ্ট ত্রিভুজের একটি কোণের সম্পূরক হইবে (অথবা যাহার দুইটি বাহু নির্দিষ্ট ত্রিভুজের দুইটি বাহুর সহিত পরস্পর সমান হইবে)।

৩। দুই ইঞ্চি দীর্ঘ বাহুবিশিষ্ট একটি সমবাহু ত্রিভুজের সহিত সমান করিয়া একটি আয়তক্ষেত্র অঙ্কিত কর এবং ইহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

৪। ABCD একটি সামান্তরিক ; AC ইহার একটি কর্ণ এবং K এই কর্ণস্থিত যে কোন বিন্দু। K বিন্দুর ভিতর দিয়া EF ও GH যথাক্রমে AD ও DC র সমান্তরাল করিয়া টানা হইল।

প্রমাণ কর যে সামান্তরিক GDCH = সামান্তরিক EFCB ; এবং সামান্তরিক ADFE = সামান্তরিক ABHG।

দ্রষ্টব্য। সামান্তরিকের এই ধর্ম্ম হইতে নিম্ন সম্পাদ্যটি সমাধান করা যাইতে পারে—

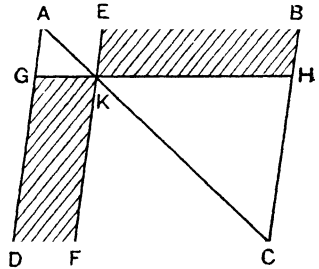
ADFE একটি নির্দিষ্ট সামান্তরিক ; ইহার সহিত সমক্ষেত্রফল আর একটি সামান্তরিক অঙ্কিত করিতে হইবে যাহার একটি বাহুর দৈর্ঘ্য (AB) নির্দ্দিষ্ট থাকিবে।

সমাধান। ADFE সামান্তরিকের AE বাহুকে বর্ধিত করিয়া ইহা হইতে নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্য AB কাটিয়া লও। ABCD সামান্তরিকটি অঙ্কিত কর। AC যোগ কর ; মনে কর, AC, EF কে K বিন্দুতে ছেদ করে। K বিন্দুর ভিতর দিয়া AB র সমান্তরাল GKH সরলরেখা অঙ্কিত কর। ABHG সামান্তরিকটি নির্ণেয় সামান্তরিক হইবে।

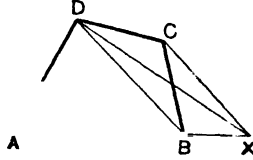
৫। দুই ইঞ্চি দীর্ঘ বাহুবিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্রের সহিত সমান একটি আয়তক্ষেত্র অঙ্কিত কর যাহার একটি বাহু তিন ইঞ্চি হইবে।

৬। ABCD একটি সামান্তরিক ; ইহার AB = 2″, AD = 3″ এবং ∠A = 60°। এই সামান্তরিকের সহিত সমান একটি রম্বস অঙ্কিত কর যাহার একটি বাহু 4″ হইবে।

৭। একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সহিত সমান করিয়া এমন একটি আয়তক্ষেত্র অঙ্কিত কর যাহার একটি বাহু কোন নির্দিষ্ট সরল রেখার সহিত সমান হইবে।

(With a given straight line as one of its sides, construct a rectangle equal in area to a given triangle.)

সম্পাদ্য ১৫ (Problem 15)

একটি চতুর্ভুজের সমান একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To construct a triangle equal in area to a given quadrilateral.]

চিত্র ১৮২

ABCD একটি নির্দিষ্ট চতুর্ভুজ; ইহার সহিত সমান একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। DB যোগ কর।

C বিন্দুর ভিতর দিয়া DBর সমান্তরাল একটি সরল রেখা টান, এবং মনে কর, ইহা বর্ধিত AB রেখাকে X বিন্দুতে ছেদ করে।

DX যোগ কর।

DAX ত্রিভুজটি নির্ণেয় ত্রিভুজ হইবে।

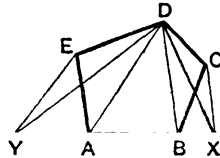
প্রমাণ। DCB ও DXB এই দুইটি ত্রিভুজ, একই ভূমি DB এবং একই সমান্তরাল রেখা DB ও CX এর মধ্যে অবস্থিত।

∴ $\triangle DCB = \triangle DXB$ (উপ. ২৬)

∴ $\triangle DCB + \triangle DAB = \triangle DXB + \triangle DAB$;

∴ চতুর্ভুজ $ABCD = \triangle DAX$।

মন্তব্য ১। এই প্রণালী অবলম্বনে যে কোন বহুভুজের সহিত সমান করিয়া একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করা যাইতে পারে।

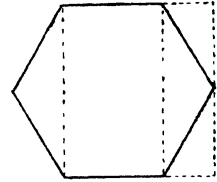
ABCDE একটি পঞ্চভুজ। উক্ত প্রণালী অবলম্বন করিয়া প্রথমত ইহার সমান AXDE চতুর্ভুজ অঙ্কিত করা হইয়াছে; তারপর, এই চতুর্ভুজের সমান DXY ত্রিভুজটি অঙ্কিত করা হইয়াছে।

চিত্র ১৮৩

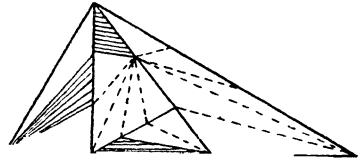
মন্তব্য ২। এই পঞ্চভুজের সহিত সমান একটি সামান্তরিক অঙ্কিত করিতে হইলে প্রথমত পঞ্চভুজটিকে একটি সমান ত্রিভুজে পরিণত করিয়া সম্পাদ্য ১৪ অনুযায়ী এই ত্রিভুজের সমান সামান্তরিক অঙ্কিত করিতে হইবে।

অনুশীলনী ৩৪

১। একটি সুষম ষড়ভুজের সমান একটি আয়তক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইবে।

[Construct a rectangle equal in area to a given regular hexagon)

১৮৪ চিত্রে বিন্দুচিহ্নিত রেখাগুলি অঙ্কন প্রণালী নির্দেশ করিতেছে।

চিত্র ১৮৪

২। ঘনরেখাময় ত্রিভুজ তিনটি মূল ত্রিভুজের কত অংশ ?

চিত্র ১৮৫

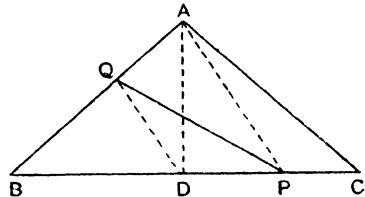
৩। যে কোন বিন্দুর ভিতর দিয়া সরল রেখা অঙ্কিত করিয়া একটি সামান্তরিককে সমদ্বিখণ্ডিত কর। (অনুশীলনী ৩২, প্রশ্ন ১৩ দ্রষ্টব্য)

৪। একটি বাহুর উপর অঙ্কিত লম্ব দ্বারা একটি সামান্তরিককে সমদ্বিখণ্ডিত কর।

৫। একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সমান করিয়া এমন আর একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে, যাহার উচ্চতা একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার সহিত সমান হইবে।

৬। একটি ত্রিভুজের যে কোন বাহুর একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে একটি সরলরেখা অঙ্কিত করিয়া ত্রিভুজটিকে সমান দুই ভাগে বিভক্ত করিতে হইবে।

[To bisect a triangle by a straight line drawn through a given point on one of its sides]

ABC একটি ত্রিভুজ; ইহার BC বাহুস্থিত P যে কোন একটি বিন্দু। P বিন্দু হইতে এমন একটি সরলরেখা টানিতে হইবে যাহা △ABCকে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে।

চিত্র ১৮৬

অঙ্কন। BCকে D বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর, এবং AP যোগ কর। D হইতে APর সহিত সমান্তরাল DQ রেখা টান, এবং মনে কর, DQ, ABকে Q বিন্দুতে ছেদ করে। PQ যোগ কর। PQ রেখা △ABCকে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে।

প্রমাণ। AD যোগ কর।

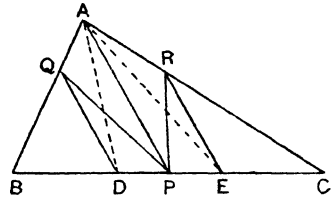
△ADP ও △AQP উভয়ের ভূমি AP, উভয়েই AP ও QD সমান্তরাল রেখার মধ্যে অবস্থিত। অতএব, △ADP = △AQP ; এই সমান দুই বস্তুর সহিত △APC যোগ কর ; তাহা হইলে, চতুর্ভুজ AQPC = △ADC = $\frac{1}{2}$△ABC।

দ্রষ্টব্য—যে বাহুর উপর বিন্দু গ্রহণ করিবে, সেই বাহুকেই দ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

৭। একটি ত্রিভুজের যে কোন বাহুর একটি বিন্দু হইতে দুইটি সরল রেখা টানিয়া ত্রিভুজটিকে সমান তিন ভাগে বিভক্ত করিতে হইবে।

[To trisect a triangle by straight lines drawn through a given point on one of its sides.)

চিত্র ১৮৭

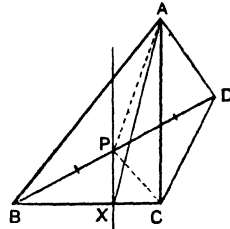
ABC একটি ত্রিভুজ এবং ইহার BC বাহুস্থিত P একটি বিন্দু। BC বাহুকে D ও E বিন্দুতে সমান তিন ভাগে বিভক্ত কর ; AP যোগ কর। D ও E বিন্দু হইতে DQ ও ER, PAর সহিত সমান্তরাল করিয়া আঁক। মনে কর, DQ, ABকে Q বিন্দুতে এবং ER ACকে R বিন্দুতে ছেদ করে। PQ ও PR যোগ কর। PQ ও PR এই দুইটি রেখা ত্রিভুজকে সমান তিনভাগে বিভক্ত করিবে।

প্রমাণ। △PRE = △AER ; ∴ △PRC = △AEC = $\frac{1}{3}$ △ABC ; এইরূপে, △PQB = △ADB = $\frac{1}{3}$ △ABC।

৮। কোন চতুর্ভুজের একটি কৌণিক বিন্দু হইতে সরল রেখা টানিয়া ইহাকে সমান দুই ভাগে বিভক্ত করিতে হইবে। (কঃ প্রঃ ১৯৩৭)

[To bisect a quadrilateral by a straight line drawn through a vertex.)

চিত্র ১৮৮

ABCD একটি চতুর্ভুজ ; কৌণিক বিন্দু A হইতে একটি সরলরেখা টানিয়া ইহাকে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। BD ও AC যোগ কর। BDকে P বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর, এবং P হইতে PX রেখা ACর সমান্তরাল করিয়া অঙ্কিত কর। মনে কর, PX, CBকে X বিন্দুতে ছেদ করে। AX যোগ কর। AX রেখা ABCD চতুর্ভুজকে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে।

প্রমাণ। $\triangle APD = \frac{1}{2}\triangle ABD$; $\triangle CPD = \frac{1}{2}\triangle CBD$;

অতএব, $APCD = \frac{1}{2}ABCD$। আবার, $\triangle APC = \triangle AXC$,

$\therefore \quad AXCD = APCD = \frac{1}{2}ABCD$।

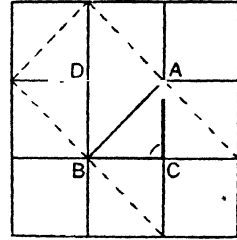
মন্তব্য। চতুর্ভুজটিকে সমক্ষেত্র ত্রিভুজে পরিণত করিয়া A বিন্দু হইতে মধ্যমা টানিয়া ইহাকে বিভক্ত করা যাইতে পারে—কিন্তু ইহা সর্বত্র খাটে না। কারণ, অনেক সময় দেখা যায় যে উক্ত মধ্যমার কিয়দংশ মূল চতুর্ভুজটির বাহিরে পড়িয়া যায়। তখন ইহা দ্বারা পরিবর্তিত ত্রিভুজটি সমদ্বিখণ্ডিত হয় বটে, মূল চতুর্ভুজটি নাও হইতে পারে।

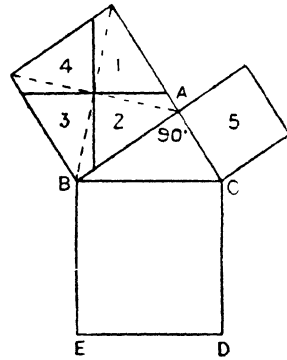
৯। কোন বর্গক্ষেত্রের একটি কৌণিক বিন্দু হইতে একটি সরলরেখা টানিয়া ইহাকে সমান দুই ভাগে বিভক্ত কর।

১০। কোন ট্রাপিজিয়মের একটি কৌণিক বিন্দু হইতে সরলরেখা টানিয়া ইহাকে সমান দুই-ভাগে বিভক্ত কর।

দ্বিতীয় অধ্যায়

পীথাগোরাসের উপপাদ্য

৬৯। (ক) পার্শ্বের চিত্রে একটি বর্গক্ষেত্রকে সমান সমান নয়টি বর্গক্ষেত্রে বিভক্ত করা হইয়াছে। মধ্যস্থলের বর্গক্ষেত্রটির নাম ADBC। ACB একটি সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ ; ইহার AC = BC এবং $\angle C = 90°$। চিত্র হইতে পরীক্ষা করিয়া দেখ যে ABর উপরস্থিত বর্গক্ষেত্রের কালি, AB ও ACর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের কালির সমষ্টির সমান হইবে।

চিত্র ১৮৯

(খ) ABC একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত কর, যাহার $\angle A = 90°$; এবং চিত্রে যেরূপ দেখান হইয়াছে সেইরূপ BC, CA ও ABর উপর যথাক্রমে তিনটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর। ABর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের কর্ণদ্বয় অঙ্কিত কর এবং ইহারা যে বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করে তাহার ভিতর দিয়া BC ও BE র সমান্তরাল দুইটি রেখা টান ; এই দুইটি রেখা ABর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রকে 1, 2, 3 ও 4 এই চারিটি চতুর্ভুজে বিভক্ত করিবে। এই চারিটি চতুর্ভুজ ও BCর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র (5) কে কাঁচি দিয়া কাটিয়া লইয়া BCDE বর্গক্ষেত্রের উপর সাজাইয়া দেখ যে ইহারা সম্পূর্ণরূপে ইহাকে আবৃত করে।

এই দুইটি পরীক্ষা হইতে পীথাগোরাসের বিখ্যাত উপপাদ্যের সত্য সম্বন্ধে ইঙ্গিত পাওয়া যায় ; উপপাদ্যটি এই—কোন সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের কালি ইহার অপর বাহুদ্বয়ের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের কালির সমষ্টির সমান।

এই উপপাদ্যটি গ্রীস্ দেশীয় বিখ্যাত পণ্ডিত পীথাগোরাস আবিষ্কার করিয়াছিলেন। এই জন্য ইহা 'পীথাগোরাসের উপপাদ্য' (Pythagoras Theorem) নামে খ্যাত।

১০। টিকা। পীথাগোরাস খৃঃ পূঃ ষষ্ঠ শতাব্দীতে আবির্ভূত হইয়াছিলেন ; কিন্তু ইহাঁর জন্মের বহু পূর্ব্বে অর্থাৎ প্রায় খৃঃ পূঃ ২০০০তে মিশরীয়গণ জানিতেন যে, একটি সমকোণী ত্রিভুজের বাহুদ্বয় যথাক্রমে 3 ও 4 একক হইলে অতিভুজটি 5 একক হইবে ; মিশরীয় ভূ-পরিমাপকগণ সমকোণ অঙ্কিত করিবার জন্য একগাছি দড়িতে 3, 4 ও 5 একক পরিমাণ চিহ্নিত করিয়া ব্যবহার করিতেন।

ভারতের বৈদিকযুগের ব্রাহ্মণও এই বিষয়ে সম্যক্ অভিজ্ঞ ছিলেন। 'শুল্বসূত্র' হইতে তাহার প্রমাণ পাওয়া যায়।

"ত্রিকচতুষ্কয়োর্দ্বাদশিকপঞ্চিকয়োঃ পঞ্চদশিকাষ্টিকয়োঃ সপ্তিকচতুর্বিংশিকয়োর্দ্বাদশিকপঞ্চত্রিংশিকয়োঃ পঞ্চদশিকষট্ত্রিংশিকয়োরিত্যেতা সুপলব্ধিঃ—" বৌধায়নসূত্র।

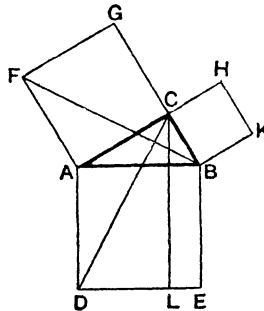
অর্থাৎ, ত্রিভুজের বাহুদ্বয় যথাক্রমে ৩ ও ৪, ১২ ও ৫, ১৫ ও ৮, ৭ ও ২৪, ১২ ও ৩৫, ১৫ ও ৩৬ হইলে তাহাদের কর্ণের পরিমাণ নির্ধারণ সুসাধ্য। প্রকৃতই কর্ণগুলি যথাক্রমে ৫, ১৩, ১৭, ২৫, ৩৭ ও ৩৯ হয়।

সাংকেতিক চিহ্ন। AB^2 বলিতে ABর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের কালি বুঝিতে হইবে।

উপপাদ্য ২৮ (Theorem 28)

একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র ইহার অপর বাহুদ্বয়ের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টির সমান।

[The square on the hypotenuse of a right-angled triangle is equal to the sum of the squares on the sides containing the right angle.]

চিত্র ১৯১

ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ ; ইহার $\angle C$ = সমকোণ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $AB^2 = AC^2 + BC^2$।

অঙ্কন। AB, BC ও CAর উপর যথাক্রমে ABED, BCHK এবং এবং CAFG বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর।

C বিন্দু হইতে CL, BDর সমান্তরাল করিয়া অঙ্কিত কর।

CD ও BF যোগ কর।

প্রমাণ। $\because$ $\angle ACB = \angle ACG =$ এক সমকোণ,

$\therefore$ CB ও CG একই সরলরেখা।

এখন, $\angle BAD = \angle CAF =$ এক সমকোণ ;

$\therefore$ $\angle BAD + \angle BAC = \angle CAF + \angle BAC$;

অর্থাৎ, $\angle CAD = \angle BAF$ ।

BAF ও CAD ত্রিভুজদ্বয়ের

$BA = AD$

$AF = AC$

এবং অন্তঃ $\angle BAF =$ অন্তঃ $\angle CAD$;

$\therefore$ $\triangle BAF \equiv \triangle CAD$ । (উপ. ৪)

এখন, বর্গক্ষেত্র $CAFG = 2\triangle BAF$,

কারণ, ইহারা একই ভূমি AF এর উপর এবং একই সমান্তরালরেখা AF ও GBর মধ্যে অবস্থিত ; (উপ. ২৫)

এবং আয়তক্ষেত্র $AL = 2\triangle CAD$,

কারণ, ইহারা একই ভূমি AD এবং একই সমান্তরাল রেখা AD ও CL এর মধ্যে অবস্থিত।

অতএব, বর্গক্ষেত্র CAFG = আয়তক্ষেত্র AL ।

এইরূপে, AK ও CE যোগ করিয়া প্রমাণ করা যায়, যে

বর্গক্ষেত্র BCHK = আয়তক্ষেত্র BL ;

অতএব, বর্গক্ষেত্র ABED = বর্গক্ষেত্র BCHK + বর্গক্ষেত্র CAFG

অর্থাৎ, $AB^2 = BC^2 + CA^2$ ।

দ্রষ্টব্য ১। উক্ত ABC ত্রিভুজের CM যদি অতিভুজ ABর উপর লম্ব হয় (চিত্রে নাই)

তবে $AC^2 = AB.\ AM$,

এবং $BC^2 = AB.\ BM$ হইবে।

(২) ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ; ইহার $\angle C = 90°$,

অতএব, $c^2 = a^2 + b^2$

$\therefore\quad a^2 = c^2 - b^2$, এবং $b^2 = c^2 - a^2$।

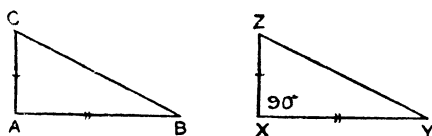
ইহা হইতে নিম্ন সম্পাদ্যটি অঙ্কনের ইঙ্গিত পাওয়া যায়—অঙ্কিত দুইটি বর্গক্ষেত্রের সমষ্টির সমান অথবা অন্তরফলের সমান আর একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কন করিতে হইবে।

(৩) সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র অপর বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র হইতে বৃহত্তর; অতএব, সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজটিই বৃহত্তম বাহু।

৭১। পীথাগোরাস উপপাদ্যের বিপরীত প্রতিজ্ঞা

উপপাদ্য ২৯ (Theroem 29)

কোন ত্রিভুজের একটি বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র উহার অপর বাহুদ্বয়ের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টির সমান হইলে শেষোক্ত বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণ সমকোণ হইবে।

[If the square on one side of a triangle is equal to the sum of the squares on the other two sides, the angle contained by these two sides is a right angle.]

চিত্র ১৯২

ABC ত্রিভুজের $BC^2 = AB^2 + AC^2$।

প্রমাণ করিতে হইবে যে $\angle BAC = 90°$।

প্রমাণ। XYZ ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর যেন ইহার

$$XY = AB,$$
$$XZ = AC,$$
এবং $\angle YXZ = 90^\circ$ হয়।

এখন, $XY^2 = AB^2$ এবং $XZ^2 = AC^2$;

অতএব, $XY^2 + XZ^2 = AB^2 + AC^2$ ।

কিন্তু, $XY^2 + XZ^2 = YZ^2$ (পীথাগোরাসের উপ.)

এবং $AB^2 + AC^2 = BC^2$ (স্বীকার) ;

$\therefore YZ^2 = BC^2$;

$\therefore YZ = BC$ ।

এখন, ABC ও XYZ ত্রিভুজদ্বয়ের

$$AB = XY$$
$$BC = YZ$$
এবং, $CA = ZX$;

$\therefore$ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম। (উপ. ৭)

$\therefore \angle BAC = \angle YXZ = 90^\circ$ ।

৭২। সমকোণী ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয়ের সঙ্কেত

(ক) সমকোণী ত্রিভুজের তিনটি বাহু যথাক্রমে (১) যে কোন অযুগ্ম সংখ্যা (২) ইহার বর্গফলের অর্ধেকের নিম্নতর আসন্ন পূর্ণসংখ্যা এবং (৩) উচ্চতর আসন্ন পূর্ণ সংখ্যা। মনে কর, একটি বাহু 7″ ; এই নিয়মানুসারে অপর বাহু দুইটি $(\frac{7}{2})^2$ অর্থাৎ $24\frac{1}{2}$ এর দুইটি আসন্ন পূর্ণ সংখ্যা 24″ ও 25″ হইল।

(খ) যুগ্ম অথবা অযুগ্ম এমন দুইটি সংখ্যা স্থির কর যাহাদের গুণফল পূর্ণবর্গ হইবে। সমকোণী ত্রিভুজের বাহু তিনটি যথাক্রমে (১) উক্ত সংখ্যাদ্বয়ের অন্তর ফলের অর্ধেক (২) উক্ত সংখ্যাদ্বয়ের যোগফলের অর্ধেক এবং (৩) উক্ত সংখ্যাদ্বয়ের গুণফলের বর্গমূল হইবে।

(গ) যে কোন সংখ্যার (১) দ্বিগুণ, (২) বর্গ+1 এবং (৩) বর্গ−1, এই তিনটি সমকোণী ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য হইবে।

$$[(2m)^2 = (m^2+1)^2 - (m^2-1)^2]$$

অনুশীলনী ৩৫

১। ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ ; ইহার $\angle A$ সমকোণ। নিম্নে ইহার দুইটি বাহুর পরিমাণ দেওয়া হইল, তৃতীয় বাহুটির পরিমাণ স্থির করিতে হইবে—

	AB	BC	CA
(১)	3″	?	4″
(২)	1·5″	2·5″	?
(৩)	2·5 সেঃ মিঃ	6·5 সেঃ মিঃ	?
(৪)	8″	?	15″
(৫)	12 গজ	?	35 গজ
(৬)	15 গজ	?	36 গজ

২। নিম্নে কয়েকটি ত্রিভুজের বাহুগুলির পরিমাণ প্রদত্ত হইল ; ইহাদের মধ্যে কোন্ কোন্টি সমকোণী ত্রিভুজ নির্ণয় কর ঃ—

(ক) 6″, 8″, 10″ ; (খ) 10″, 22″, 24″ ; (গ) 15″, 24″, 26″

(ঘ) 7·5″, 4″, 8·5″।

৩। একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ 16″ এবং একটি বাহু 6″ ; ত্রিভুজটির কালি কত ?

৪। একটি বর্গক্ষেত্রের বাহুর পরিমাণ 4″ ; ইহার কর্ণ ও তদুপরি অঙ্কিত বর্গের ক্ষেত্রফল কত ?

৫। একটি আয়তক্ষেত্রের কর্ণ ও একটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 26 ও 10 ইঞ্চি ; আয়তক্ষেত্রের কালি কত ?

৬। একটি রম্বসের কর্ণদ্বয় যথাক্রমে 8″ ও 6″ দীর্ঘ ; ইহার বাহুগুলির পরিমাণ কত ?

৭। 5″, 5″ ও 8″ দীর্ঘ সরল রেখা দ্বারা অঙ্কিত ত্রিভুজের দীর্ঘতম বাহুকে ভুমি ধরিলে ত্রিভুজের উচ্চতা কত হইবে ?

৮। একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান বাহুদ্বয় প্রত্যেকে 10″ দীর্ঘ, এবং ইহার শীর্ষবিন্দুর উচ্চতা 6″, ত্রিভুজের কালি কত ?

৯। একটি সমবাহু ত্রিভুজের বাহু 4″ ; ইহার উচ্চতা ও কালি কত ?

১০। যাহার দুইটি বিপরীত কোণের প্রত্যেকটি এক সমকোণ এবং যাহার চারিটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 2″,16″, 18″ ও 24″ এমন কোন চতুর্ভুজ অঙ্কন সম্ভব কি না কারণ সহ নির্দেশ কর।

১১। একটি সুষম ষড়্‌ভুজের প্রতি বাহু 4″ ; ইহার কালি নির্ণয় কর।

১২। একটি সমকোণী ত্রিভুজের একটি কোণ 30°। প্রমাণ কর যে ইহার ক্ষুদ্রতম বাহুটি বৃহত্তম বাহুর অর্ধেক।

(If one angle of a right angled triangle is 30°, the shortest side is half the longest side.)

১৩। একটি লোক A হইতে যাত্রা করিয়া উত্তর দিকে 15 মাইল যাইয়া পূর্বদিকে 36 মাইল গেল। লোকটি A হইতে কতদূরে গেল ?

১৪। সমভূমির উপর 60 গজ দূরে অবস্থিত দুইটি খাড়া তালগাছের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 48 গজ ও 72 গজ। গাছ দুইটির মাথার দূরত্ব কত ?

১৫। একটি টেলিগ্রাফ্ থাম 30 গজ ও 32 গজ দীর্ঘ দুইটি তার দিয়া ঠিক সোজা রাখা হইয়াছে। তার দুইটির একপ্রান্ত থামটির মাথায় বাঁধা আছে, এবং অপর দুই প্রান্ত থামের বিপরীত দিকে পরস্পর ২০ গজ দূরে মাটির সহিত আটকান আছে। থামটির দৈর্ঘ্য কত ? এবং তার দুইটি থামের গোড়া হইতে কতদূরে মাটিতে বাঁধা আছে ?

১৬। একটি লোক উত্তর দিকে 12 মাইল যাইয়া যথাক্রমে দক্ষিণ-পূর্ব দিকে 10 মাইল ও দক্ষিণ দিকে 4 মাইল গেল। লোকটি যেখান হইতে যাত্রা করিয়াছিল সেখান হইতে কতদূর গেল ?

১৭। ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ ; ইহার $\angle B = 90^\circ$, $\angle A = 60^\circ$ এবং $AB = 4''$। তিনটি বাহুর উপরই সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত হইল। প্রত্যেকটি ত্রিভুজের কালি নির্ণয় করিয়া দেখাও যে, অতিভুজের উপর অঙ্কিত ত্রিভুজের কালি অপর দুইটি ত্রিভুজের কালির সমষ্টির সমান।

তিনটি ত্রিভুজের কালির সমষ্টির সহিত মূল ত্রিভুজের কালির তুলনা কর।

১৮। ABCD একটি আয়তক্ষেত্র এবং ইহার অভ্যন্তরস্থ O একটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে $OA^2 + OC^2 = OB^2 + OD^2$।

১৯। ABC একটি ত্রিভুজ এবং ইহার অন্তরস্থিত O একটি বিন্দু। BC, CA ও AB বাহুর উপর যথাক্রমে OX, OY ও OZ তিনটি লম্ব। প্রমাণ কর $AZ^2 + BX^2 + CY^2 = AY^2 + CX^2 + BZ^2$।

২০। ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ এবং P, BC বাহুর মধ্যবিন্দু। প্রমাণ কর, $AP^2 = 3BP^2 = \frac{3}{4}AB^2$।

২১। ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ ; ইহার $\angle C$ সমকোণ। AC ও CBর উপর যথাক্রমে P ও Q দুইটি বিন্দু। প্রমাণ কর

$$AQ^2 + BP^2 = AB^2 + PQ^2 \text{ ।}$$

২২। কোন সমকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্ম কৌণিকবিন্দুদ্বয় হইতে অঙ্কিত মধ্যমাদ্বয়ের উপর বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টি অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের পাঁচগুণ হইবে।

২৩। ABC একটি ত্রিভুজ, এবং AD ইহার উচ্চতা। প্রমাণ কর

$$BX^2 - CX^2 = AB^2 - AC^2 \text{ ।}$$

২৪। ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ ; ইহার $\angle A = 90^\circ$। X, AB স্থিত যে কোন একটি বিন্দু। প্রমাণ কর, $XC^2 + AB^2 = BC^2 + XA^2$।

২৫। ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ; BCর মধ্যবিন্দু P এবং PCর মধ্যবিন্দু Q। প্রমাণ কর যে $AQ^2 = 13\ PQ^2$।

২৬। প্রমাণ কর যে একটি রম্বসের কর্ণদ্বয়েব উপর বর্গের সমষ্টি ইহার বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গের চতুর্গুণ।

২৭। একই বাহুর উপর বর্গক্ষেত্র ও সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত হইলে ত্রিভুজের কালি $= \frac{\sqrt{3}}{4} \times$ বর্গক্ষেত্র হইবে।

২৮। একই অতিভুজ ABর একদিকে দুইটি সমকোণী ত্রিভুজ ACB ও ADB। AL ও BM যথাক্রমে CDর উপর লম্ব। প্রমাণ কর যে $AL^2 + CM^2 = DL^2 + DM^2$।

২৯। ABCD একটি বর্গক্ষেত্র। P, Q, R, S চারিটি বিন্দু যথাক্রমে AB, BC, CD ও DAর উপব এমন ভাবে অবস্থিত যে PA = BQ = CR = DS। প্রমাণ কর যে

$$SQ^2 = 2\ AP^2 + BP^2)$$

৩০। ABC একটি ত্রিভুজ, CX ও BY যথাক্রমে BA ও CAব উপর লম্ব। প্রমাণ কর যে AB. AX = CA. AY।

৩১। ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ, ইহার $\angle C = 90°$। AB, BC, ও CAর উপর এবং ত্রিভুজের বহিঃপার্শ্বে অঙ্কিত ABED, BCHK এবং CAFG তিনটি বর্গক্ষেত্র।

প্রমাণ কর

(ক) $FD^2 + KE^2 = 5AB^2$, এবং

(খ) $FD^2 + DE^2 + EK^2 + KH^2 + HG^2 + GF^2 = 8AB^2$।

৩২। ABC ত্রিভুজের $\angle A$ সমকোণ। AD, BCর উপর লম্ব। যদি $AD = p$ হয়, তবে প্রমাণ কর

(ক) $ap = bc$,

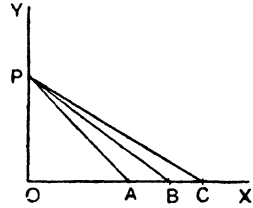
(খ) $\frac{1}{p^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$।

৭৩। পীথাগোরাস-উপপাদ্য সংসৃষ্ট সম্পাদ্য

সম্পাদ্য ১৬ (Problem 16)

কোন নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের দ্বিগুণ, ত্রিগুণ, চতুর্গুণ ইত্যাদি পরিমাণ অপর একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইবে।

(To construct a square twice, thrice, four times etc. a given square.)

অঙ্কন। পরস্পর লম্বভাবে ছেদ করে এমন দুইটি সরলরেখা OX ও OY লও। নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের বাহুর সমান করিয়া OA ও OP কাটিয়া লও; AP যোগ কর। PAর সহিত সমান করিয়া OB কাটিয়া PB যোগ কর; এবং PBর সহিত সমান করিয়া OC কাটিয়া PC যোগ কর।

চিত্র ১৯৪

PA, PB ও PCর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র নির্দিষ্ট OAর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের যথাক্রমে দ্বিগুণ, ত্রিগুণ ও চতুর্গুণ হইবে।

প্রমাণ। $PA^2=OP^2+OA^2=2OA^2$,

$$PB^2=OP^2+OB^2=OP^2+PA^2$$
$$=OP^2+2OA^2=3OA^2,$$
$$PC^2=OP^2+OC^2=OP^2+PB^2$$
$$=OP^2+3OA^2=4OA^2 \text{।}$$

মন্তব্য। (১) এই প্রকারে $5OB^2$, $6OA^2$, $7OA^2$ ইত্যাদি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত করা যায়।

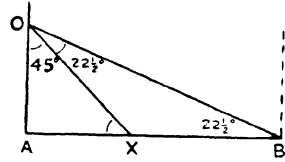
(২) যদি $OA=1$ হয়, তবে $PA=\sqrt{2}$, $PB=\sqrt{3}$, $PC=\sqrt{4}$ ইত্যাদি হইবে। এই প্রকারে কোন সীমাবদ্ধ রেখাকে একক ধরিয়া প্রত্যেক পূর্ণসংখ্যার বর্গমূল সরলরেখা দ্বারা ব্যক্ত করা যাইতে পারে।

অনুশীলনী ৩৬

১। একটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের অর্ধেক আর একটি বর্গক্ষেত্র আঁক।

২। একটি সীমাবদ্ধ সরলরেখাকে এমন দুই অংশে ভাগ কর যেন এক অংশের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র অপর অংশের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের দ্বিগুণ হয়।

(Divide a straight line into two parts such that the square on one is double the square on the other.)

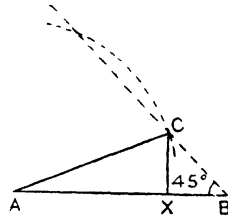
AB একটি সীমাবদ্ধ সরলরেখা। A বিন্দুতে AO, ABর উপর লম্ব টান, এবং B বিন্দুতে BAর সহিত $22\frac{1}{2}^\circ$ কোণ করিয়া BO বাহু টান; এবং মনে কর, BO ও AO, O বিন্দুতে ছেদ করে। ABO কোণের সহিত সমান করিয়া BOX কোণ টান, এবং মনে কর, OX, AB কে X বিন্দুতে ছেদ করে। AB রেখা X বিন্দুতে এমন ভাবে ছিন্ন হইবে যে $BX^2 = 2AX^2$। (প্রমাণ কর)

চিত্র ১৯৫

৩। দুইটি বর্গক্ষেত্রের সমষ্টির সমান আর একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর।

৪। দুইটি বর্গক্ষেত্রের অন্তরফলের সমান আর একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর।

৫। একটি সীমাবদ্ধ সরলরেখাকে এমন দুই ভাগে ভাগ কর যেন উভয় ভাগের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের সমষ্টি একটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের সমান হয়।

(Divide a straight line into parts such that the sum of the squares on the two parts is equal to a given square.)

AB সীমাবদ্ধ সরলরেখা। $\angle ABC = 45^\circ$ করিয়া আঁক; এবং Aকে কেন্দ্র করিয়া নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের বাহুকে ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্তচাপ দ্বারা BCকে C বিন্দুতে ছেদ কর। AB রেখার উপর CX লম্ব টান। (প্রমাণ কর $AX^2 + BX^2 = CA^2$)। এই প্রকার অঙ্কন কি সর্বদাই সম্ভব ?

চিত্র ১৯৬

৬। একটি সীমাবদ্ধ সরলরেখাকে এমন দুই অংশে বিভক্ত কর যেন উভয় অংশের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের অন্তরফল একটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের সমান হয়।

৭। একটি সীমাবদ্ধ সরলরেখাকে এমন দুই অংশে বিভক্ত কর যেন এক অংশের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র অপর অংশের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের তিনগুণ হয়।

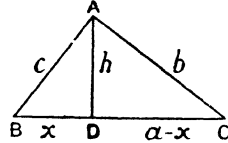
৮। তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য দেওয়া থাকিলে একটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করিতে হইবে।

[Express the area of a triangle in terms of its sides.)

ABC যে কোন একটি ত্রিভুজ এবং BC, CA ও AB বাহু যথাক্রমে a, b ও c একক দীর্ঘ।

ধর, AD, BC র উপর লম্ব এবং h একক দীর্ঘ।

মনে কর, $BD = x$ একক, তাহা হইলে $CD = a - x$ একক হইবে।

চিত্র ১৯৭

যেহেতু, $\angle ADB = 90^\circ$,

স্থতরাং $AD^2 = AB^2 - BD^2$;

অর্থাৎ $h^2 = c^2 - x^2$ ... (১)

এইরূপে, $h^2 = b^2 - (a-x)^2$ ... (২)

স্থতরাং (১) ও (২) হইতে,

$$c^2 - x^2 = b^2 - (a-x)^2$$

অথবা, $c^2 - x^2 = b^2 - a^2 + 2ax - x^2$;

$\therefore \quad 2ax = a^2 - b^2 + c^2$

$\therefore \quad x = \dfrac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}$ ... (৩)

এইবার, (১) হইতে, $h^2 = c^2 - x^2 = c^2 - \left(\dfrac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}\right)^2$

$$= \frac{4a^2c^2 - (a^2 - b^2 + c^2)^2}{4a^2}$$

$$= \frac{\{(a+c)^2 - b^2\}\{b^2 - (a-c)^2\}}{4a^2}$$

$$= \frac{(a+b+c)(a+c-b)(b+a-c)(b-a+c)}{4a^2}$$

$$= \frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{a^2}$$

(যদি $2s = a + b + c$ = ত্রিভুজের পরিসীমা হয়।)

$\therefore$ ABC ত্রিভুজের কালি $= \frac{1}{2}$ BC.AD $= \frac{1}{2}ah$

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

৮ (ক)। নিম্নে ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য দেওয়া হইল, ত্রিভুজটির কালি কত ?

(ক) 40′, 30′ ও 50′
(খ) 55 গজ, 75 গজ ও 100 গজ
(গ) 400 গজ, 300 গজ ও 600 গজ

৯। একটি বর্গক্ষেত্রের বাহুর উপর ইহার সমান একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত কর।

(On the side of a square construct an isosceles triangle of equal area.)

১০। একই বাহুর উপর একটি বর্গক্ষেত্র ও একটি রম্বস অঙ্কিত হইলে প্রমাণ কর যে বর্গক্ষেত্রের কালি বৃহত্তর হইবে।

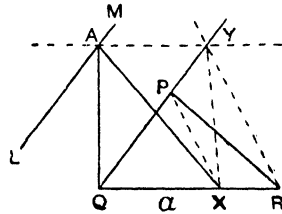
১১। ABCD একটি আয়ত। ইহার কর্ণদ্বয় AC ও BD পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করে। যদি $\angle AOD = 60°$ হয়, এবং BCর উপরিস্থ P এমন একটি বিন্দু হয় যে $BC = 4BP$, প্রমাণ কর যে $AP = 7BP$।

১২। ABCD একটি আয়তক্ষেত্র এবং O ইহার অভ্যন্তরস্থ একটি বিন্দু। O বিন্দুর সহিত চারিটি কৌণিক বিন্দু যোগ করিলে যে চারিটি ত্রিভুজের উৎপত্তি হয়, প্রমাণ কর যে তাহাদের দুইটি ত্রিভুজের সমষ্টি অপর দুইটি ত্রিভুজের সমষ্টির সমান হইবে।

১৩। ABCD একটি সামান্তরিক এবং DC বাহুর উপরিস্থিত O একটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে $\Delta AOD \pm \Delta AOB = \Delta AOC$।

১৪। ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ, ইহার ভূমি $= 36''$ এবং উচ্চতা $= 24''$। BC কে বর্ধিত করিয়া ইহার উপর P একটি বিন্দু লও। যদি $AP = 40''$ হয়, প্রমাণ কর যে $\angle BAP =$ এক সমকোণ।

১৫। একটি ত্রিভুজের সহিত সমান করিয়া এমন আর একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে যাহার ভূমির দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে এবং যাহার শীর্ষবিন্দু একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর অবস্থিত।

PQR একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজ; নির্ণেয় ত্রিভুজের ভূমি $= a$ একক এবং ইহার শীর্ষ LM সরল রেখার উপর অবস্থিত। QR হইতে QX $(= a)$ কাটিয়া লও। PX যোগ কর; XP এর সমান্তরাল করিয়া RY রেখা টান; মনে কর, RY, QPকে Y বিন্দুতে ছেদ করে। QRএর সমান্তরাল YA রেখা অঙ্কিত কর; মনে কর, YA, LM কে A বিন্দুতে ছেদ করে। AQ, AX যোগ কর। AQX নির্ণেয় ত্রিভুজ হইবে। (প্রমাণ কর $\Delta PQR = \Delta XQY = \Delta AQX$)

১৬। একটি প্রদত্ত সসীম রেখার উপর এমন একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে যে উহা অপর একটি ত্রিভুজের সমান হইবে এবং উহার একটি কোণ একটি প্রদত্ত কোণের সমান হইবে।

১৭। দুইটি ত্রিভুজের কালির যোগফলের সমষ্টির সমান করিয়া আর একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত কর।

১৮। দুইটি সমান সমান ত্রিভুজ একই ভূমির উভয় পার্শ্বে অঙ্কিত। প্রমাণ কর ইহাদের শীর্ষবিন্দুদ্বয় সংযোগকারী সরলরেখা ভূমিরেখা দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হইবে।

১৯। ABC একটি ত্রিভুজ এবং AD ইহার একটি মধ্যমা। XY রেখা BCর সহিত সমান্তরাল করিয়া টানা হইল। প্রমাণ কর যে AD, XY কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

২০। AE ও CF এই দুইটি সমান্তরাল রেখার মধ্যে অবস্থিত ACB ও DFE দুইটি ত্রিভুজের ভূমি $AB = DE$; PQRS একটি সরলরেখা AEর সমান্তরাল; ইহা CA, CB, FD ও EF কে যথাক্রমে P, Q, R, S বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর, $PQ = RS$।

তৃতীয় খণ্ড

প্রথম অধ্যায়

বৃত্তের ধর্ম, অতিরিক্ত সংজ্ঞা ও প্রতিসাম্য

৭৪। প্রথম খণ্ডের ১৭ অনুচ্ছেদে বৃত্ত, কেন্দ্র, পরিধি, ব্যাস, ব্যাসার্ধ, চাপ, জ্যা ও অর্ধবৃত্ত বিষয়ের সংজ্ঞা ও প্রাথমিক পরিচয় দেওয়া হইয়াছে, এজন্য তাহাদের পুনরুল্লেখ নিষ্প্রয়োজন। এই খণ্ডে বৃত্ত সম্বন্ধে নানাবিধ আলোচনা করা হইবে।

৭৫। **বৃত্তের ধর্ম**

পূর্বালোচনা হইতে নিম্নলিখিত বৃত্তের ধর্মগুলি স্পষ্ট প্রতীত হয় :—

(১) বৃত্ত একটি সসীম (bounded ; closed) ক্ষেত্র, অথবা একটি সুসংবদ্ধ বক্ররেখা।

(২) বৃত্তের কেন্দ্র হইতে পরিধিস্থ যে কোন বিন্দুর দূরত্ব সমান।

(৩) কেন্দ্র হইতে পরিধির বহিঃস্থ কোন বিন্দুর দূরত্ব ব্যাসার্ধ অপেক্ষা অধিক।

(৪) কেন্দ্র হইতে পরিধির অন্তঃস্থ কোন বিন্দুর দূরত্ব ব্যাসার্ধ অপেক্ষা ন্যূন।

(৫) বৃত্তের ক্ষেত্রে কোন বিন্দু হইতে একটি সরলরেখা টানিলে

(ক) ইহা বৃত্তকে ছেদ করে (যদি বিন্দুটি ক্ষেত্রের মধ্যে হয়) ;

(খ) ইহা বৃত্তকে ছেদ করিতে, বা, না করিতে পারে (যদি বিন্দুটি ক্ষেত্রের বাহিরে হয়) ;

(গ) অন্তর্বিন্দু হইলে বৃত্তকে দুই বিন্দুতে ছেদ করে (যদি রেখাটি দুই দিকে বর্ধিত হয়) ;

(ঘ) বহির্বিন্দু হইলে ইহা বৃত্তকে, রেখার সংস্থিতি হিসাবে, ছেদ করে ; যদি করে, তবে রেখা বর্ধিত করিলে দুই বিন্দুতেই করিবে ; ['ছেদক'—অনুচ্ছেদ ৭৬ দ্রষ্টব্য]

(ঙ) বহির্বিন্দু হইতে অঙ্কিত রেখা কখনও কখনও একটি, বা ন্যায়ত, দুইটি সমাপতিত (coincident) বিন্দুতে ছেদ করে।

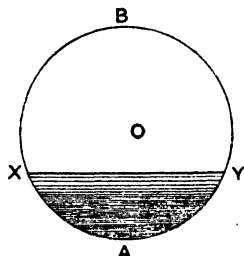
['স্পর্শক'—৪র্থ অধ্যায় দ্রষ্টব্য]

(৬) সমান সমান ব্যাসার্ধের বৃত্তগুলি সর্বসম, অর্থাৎ একটির কেন্দ্র অপরটির কেন্দ্রে স্থাপিত হইলে দুইটির পরিধি অঙ্গাঙ্গী মিলিয়া যায়।

(৭) এককেন্দ্রীয় বৃত্তগুলির ব্যাসার্ধ পরস্পর অসমান হইলে পরিধিগুলির উপরিপাত (superposition) হয় না, বা তাহারা পরস্পর ছেদিত হয় না।

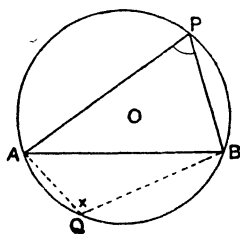
৭৬। অতিরিক্ত সংজ্ঞা

পূর্বে দেখান হইয়াছে যে বৃত্তের যে কোন ব্যাস উহাকে দুইটি অর্ধবৃত্তে বিভক্ত করে। ব্যাস ভিন্ন অপর কোন জ্যা পরিধিকে দুইটি অসমান চাপে বিভক্ত করে; বৃহত্তর চাপটি **অধিচাপ** (major arc) ও ক্ষুদ্রতরটি **উপচাপ** (minor arc) নামে অভিহিত হয়। পার্শ্বচিত্রে, XY একটি ব্যাস ভিন্ন অপর জ্যা; XBY হইল অধিচাপ এবং XAY উপচাপ।

চিত্র ১৯৯

এই দুই চাপের সমবায়ে বৃত্তের সম্পূর্ণ পরিধিটি পাওয়া যায় বলিয়া একটিকে অপরটির **অনুবন্ধী** (conjugate) বলে।

মন্তব্য। উপচাপ < অর্ধপরিধি < অধিচাপ।

ব্যাস ভিন্ন জ্যা বৃত্তক্ষেত্রটিকে দুই অংশে বিভক্ত করে; প্রত্যেকটিকে **বৃত্তাংশ** (segment of a circle) বলে। অতএব কোন বৃত্তাংশ, একদিকে জ্যা ও অপরদিকে একটি চাপ দ্বারা গঠিত) উপরি চিত্রে, ছায়া-যুক্ত (shaded) XAY অংশটি একটি বৃত্তাংশ, ছায়াহীন XBY অংশটি অপর একটি বৃত্তাংশ।

কোন বৃত্তাংশের জ্যার প্রান্তবিন্দুদ্বয় তাহার চাপের যে কোন বিন্দুর সহিত যে সংমুখ কোণ উৎপন্ন করে তাহাকে **বৃত্তাংশস্থিত** বা **বৃত্তখণ্ডস্থ কোণ** (angle in a segment) বলে; যথা, পার্শ্বচিত্রে, ∠APB, APB বৃত্তাংশের একটি কোণ এবং ∠AQB, AQB বৃত্তাংশের একটি কোণ।

চিত্র ২০০

বৃত্তের কোন একটি চাপের প্রান্তবিন্দু দুইটি হইতে ব্যাসার্ধদ্বয় টানিলে যে বেষ্টিত ক্ষেত্র উৎপন্ন হয় তাহাকে **বৃত্তকলা** (sector of a circle) বলে। যথা, পার্শ্বচিত্রে, ছায়াযুক্ত OACB এবং ছায়াবিযুক্ত OAB ক্ষেত্র দুইটি

বৃত্তকলা। ব্যাসার্ধদ্বয়ের অন্তর্বর্তী কোণকে **বৃত্তকলার কোণ** (angle of a sector) বলে। চিত্রে, সূক্ষ্মকোণ AOBটি, OACB বৃত্তকলার কোণ; এবং প্রবৃদ্ধ কোণ AOBটি (ফুটকিচিহ্নাঙ্কিত), AOB বৃত্তকলার কোণ বলিয়া নির্দিষ্ট হয়।

চিত্র ২০১

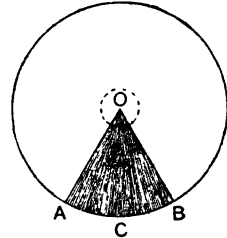
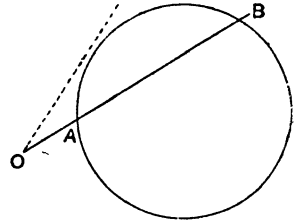
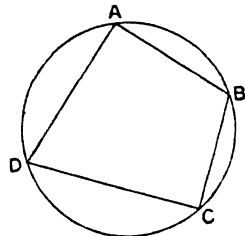
মন্তব্য। বৃত্তকলার কোণ সরল কোণ হইলে বৃত্তকলাটি অর্ধবৃত্তে পরিণত হয়।

যে বৃত্তক্ষেত্রস্থ সরলরেখা বৃত্তের পরিধিকে দুই বিন্দুতে ছেদ করে তাহাকে **ছেদক** (secant) বলে। পার্শ্বচিত্রে, OAB একটি ছেদক এবং A, B দুইটি ছেদবিন্দু।

মন্তব্য। বৃত্তক্ষেত্রের কোন অন্তর্বিন্দু হইতে অসংখ্য ছেদক টানা যায়, কিন্তু, বহির্বিন্দু O হইতে অঙ্কিত যাবতীয় সরলরেখা ছেদক হইতে পারে না. ২০২ চিত্রে, OC রেখাটি ছেদক নয়।

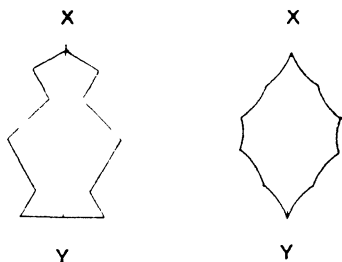
চিত্র ২০২

একই বৃত্তের পরিধিস্থ বিন্দুগুলিকে **সমবৃত্তবিন্দু** বা **সমপরিধিস্থ বিন্দু** (concyclic points) বলে। পার্শ্বচিত্রে, A, B, C, D চারিটি সমবৃত্ত বিন্দু।

বৃত্তের মধ্যে যদি এরূপ কোন ঋজুরেখ-ক্ষেত্র অঙ্কন করা হয়, যাহার কৌণিক-বিন্দু-বৃত্তের পরিধিস্থ,তাহাকে একটি **অন্তর্লিখিত ক্ষেত্র** (figure inscribed in a circle) বলা হয়। কোন চতুর্ভুজের চারিটি শীর্ষবিন্দুই যদি কোন বৃত্তের উপর অবস্থিত হয় তবে তাহা **বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ** (cyclic quadrilateral) বলিয়াও অভিহিত হয়; পক্ষান্তরে, যদি কোন ঋজুরেখক্ষেত্রের শীর্ষকোণগুলি দিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত করা সম্ভব হয়, তবে সেই বৃত্তকে ক্ষেত্রটির **পরিলিখিত বৃত্ত** (circumscribed circle) বলে। চিত্রে, ABCD চতুর্ভুজের যাহা পরিলিখিত বৃত্ত, তাহার অন্তর্লিখিত ক্ষেত্রটি হইল ঐ চতুর্ভুজটি।

চিত্র ২০৩

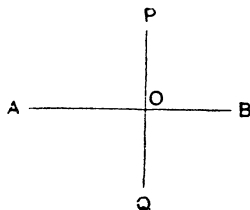
প্রতিসাম্য (Symmetry)

৭৭। সংজ্ঞা। কোন চিত্রের ক্ষেত্রে যদি এরূপ কোন রেখার অঙ্কন সম্ভব হয় যে চিত্রটি উক্ত সরলরেখা বরাবর ভাঁজ করিলে রেখার উভয় পার্শ্বস্থ অংশ দুইটির—বিন্দুতে বিন্দুতে, রেখায় রেখায়—সমাপতন হয়, তবে চিত্রটিকে উক্ত রেখাসম্পর্কে প্রতিসম (symmetrical about the line) বলা হয় ; এবং রেখাটিকে চিত্রের প্রতিসাম্য অক্ষ (axis of symmetry) বলে।

যদি কোন চিত্রের প্রতিসাম্য-অক্ষ থাকে, তবে চিত্রটির অংশদ্বয়ের একটিকে ঐ অক্ষ সম্পর্কে অপরটির **প্রতিবিম্ব** (image) বলে। যথা, অঙ্কিত চিত্রদ্বয়ে, XY রেখার এক পার্শ্বস্থ অংশ অপর অংশের প্রতিবিম্ব। চিত্রদ্বয়ের XY রেখা প্রতিসাম্য-অক্ষ , এবং সম্পূর্ণ চিত্র দুইটি XY রেখা সম্পর্কে প্রতিসম।

চিত্র ২০৪

দ্রষ্টব্য। উদাহরণ স্থলে, ৫ উপপাদ্যটিব অঙ্কন দেখ। ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজটি প্রতিসম, AD সরলবেখাটি উহাব প্রতিসাম্য-অক্ষ।

৭৮। প্রতিসাম্যের মানদণ্ড (Criterion of axial symmetry)

২০৫ চিত্রে AB একটি সরলরেখা। ইহার বাহিরে P বিন্দু লও। P হইতে ABব উপর লম্ব ফেলিয়া উহাকে অপরদিকে বর্ধিত কব, এবং বর্ধিতাংশের উপর Q বিন্দু লও যেন OQ = OP হয়। যদি চিত্রটি AB বরাবর ভাঁজ করা হয়, তবে Q বিন্দুব উপর P বিন্দুর সমাপতন হইবে। কারণ, ∠AOP = ∠AOQ এবং OP = OQ। এরূপ-স্থলে, P, Q বিন্দুদ্বয়কে AB নামক

চিত্র ২০৫

প্রতিসাম্য রেখা সম্পর্কে বিপরীত বিন্দু (symmetrically opposite with regard to the axis AB) বলা হয়, এবং একটিকে অপরটির প্রতিবিম্ব বলিতে হইবে। এতদ্বারা প্রতিপন্ন হয় যে

যদি দুইটি বিন্দু কোন রেখা সম্পর্কে প্রতিসম হয়, তবে তাহাদের সংযোজক রেখাটি প্রতিসাম্য-রেখা দ্বারা লম্ব-দ্বিখণ্ডিত হইবে; বিপরীত ক্রমে, যদি দুইটি বিন্দুর সংযোজক কোন রেখা অপর রেখা দ্বারা লম্ব-দ্বিখণ্ডিত হয়, তবে বিন্দুদ্বয় শেষোক্ত রেখা সম্পর্কে প্রতিসম হইবে।

উক্ত প্রতিজ্ঞার নিম্নলিখিত অনুসিদ্ধান্তগুলি প্রণিধানযোগ্য ঃ—

(১) কোন নির্দিষ্ট প্রতিসাম্যাক্ষ সম্পর্কে একটি বিন্দুর একমাত্র প্রতিবিম্ব আছে। কারণ, ২০৫ চিত্রে AB রেখা, (P বিন্দু সংযোজক) PQ ব্যতীত অপর কোন রেখার লম্বদ্বিখণ্ডক হইতে পারে না।

(২) যে কোন দুই বিন্দুর একটি মাত্র প্রতিসাম্যাক্ষ আছে।

(৩) বৃত্তের যে কোন জ্যার প্রান্তবিন্দু দুইটির প্রতিসাম্যাক্ষ বৃত্তটির একটি ব্যাস। কারণ, জ্যার লম্বদ্বিখণ্ডক কেন্দ্রভেদী হইবে। (৩০ উপপাদ্য দ্রষ্টব্য)

(৪) বৃত্তের কোন ছেদক উহাকে দুইটির অধিক বিন্দুতে ছেদ করে না; কারণ, করিলে জ্যার প্রান্তবিন্দুদ্বয়ের ন্যূনপক্ষে তিনটি প্রতিসাম্যাক্ষ থাকিবে, যাহার প্রত্যেকটিই কেন্দ্র ভেদ করিবে।

(৫) বৃত্তের যে কোন জ্যার লম্ব, যদি অধিকন্তু দ্বিখণ্ডক না হয়, তবে উহা কেন্দ্র ভেদ করে না।

(৬) বৃত্তের যে কোন ব্যাস উহার প্রতিসাম্যাক্ষ।

(৭) বৃত্তের কেন্দ্র ও তাহার যে কোন জ্যার মধ্যবিন্দু সংযুক্ত হইলে যে রেখা উৎপন্ন হয় তাহা জ্যার উপর লম্ব।

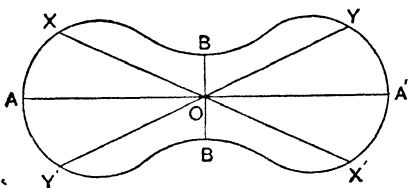
কারণ, এই রেখা জ্যার প্রান্তবিন্দুদ্বয় হইতে সমদূরবর্তী (locus of points equidistant from the extremities of the chord)।

৭৯। **প্রতিসাম্য-বিন্দু** (Point-symmetry)

'রেখা' সম্পর্কে প্রতিসাম্য ব্যতীত অন্যপ্রকার প্রতিসাম্যও লক্ষিত হয় ; সেটি 'বিন্দু' সম্পর্কে। নিম্নে দুইটি আবশ্যক মানদণ্ডের নির্বচন দেওয়া গেল।

(ক) যদি দুইটি বিন্দু তৃতীয় বিন্দু সম্পর্কে প্রতিসম হয়, তবে প্রথমোক্ত বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখা তৃতীয় বিন্দু দ্বারা দ্বিখণ্ডিত হইবে।

(খ) যদি একটি চিত্র কোন নির্দিষ্ট বিন্দু সম্পর্কে প্রতিসম হয়, তবে চিত্রের যে কোন বিন্দুর উক্ত নির্দিষ্ট বিন্দু সম্পর্কে অপর একটি প্রতিসম বিন্দু থাকিবে।

পার্শ্বচিত্রটি O বিন্দু সম্পর্কে প্রতিসম। কারণ, O বিন্দু ভেদ করিয়া যত রেখা গিয়াছে তাহাদের সীমাবিন্দুদ্বয় পরস্পর ঐ বিন্দু সম্পর্কে প্রতিসম। যথা, A,B,X,Y এই বিন্দুচতুষ্টয়ের প্রতিসমবিন্দু যথাক্রমে A′,B′,X′,Y′।

চিত্র ২০৬

দ্রষ্টব্য। চিত্রটি পরীক্ষা করিলেই বুঝা যাইবে যে, AA′, B B′ প্রত্যেকটি উহার প্রতিসাম্য-অক্ষ।

৮০। **প্রতিসাম্য-ক্ষেত্র** (Plane of symmetry)

একখানি দর্পণের সম্মুখে কোন ঘন বস্তু থাকিলে ইহার প্রতিবিম্ব, আকারে ও আয়তনে, সম্পূর্ণ অনুরূপ দৃষ্টিগোচর হয়। দর্পণখানির ক্ষেত্রকে **প্রতিসাম্য ক্ষেত্র** বলিলে বস্তুটি ও তাহার প্রতিবিম্ব উক্ত ক্ষেত্র সম্পর্কে প্রতিসম (symmetrical about the plane of the mirror) হইবে।

অনুশীলনী ৩৭

১। কোন বৃত্ত যে কোন ব্যাস সম্পর্কে প্রতিসম।

২। কোন বৃত্ত তাহার কেন্দ্র সম্পর্কে প্রতিসম।

৩। কোন সমবাহুত্রিভুজ উহার যে কোন মধ্যমা সম্পর্কে প্রতিসম।

৪। কোন বর্গক্ষেত্র উহার যে কোন কর্ণ সম্পর্কে প্রতিসম। ইহা কি কোন বিন্দু সম্পর্কে প্রতিসম হইবে ?

৫। কোন সামান্তরিক উহার যে কোন কর্ণ সম্পর্কে প্রতিসম নয় ; হইলে, উহা রম্বসে পরিণত হয়।

৬। কোন রম্বস উহার যে কোন কর্ণ সম্পর্কে প্রতিসম।

৭। কোন আয়তক্ষেত্র উহার যে কোন কর্ণ সম্পর্কে প্রতিসম। ইহা কি কোন বিন্দু সম্পর্কে প্রতিসম হইবে ?

৮। কোন সামান্তরিক যে কোন একটি কর্ণের মধ্যবিন্দু সম্পর্কে প্রতিসম। ইহা হইতে সিদ্ধান্ত কর যে, উহার কর্ণদ্বয় পরস্পরের দ্বিখণ্ডক।

৯। নিম্নলিখিত ইংরাজী বর্ণগুলির কিরূপ প্রতিসাম্য আছে তাহা নির্ণয় কর ঃ—

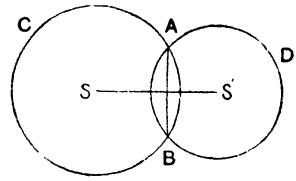
A D M O X Z

১০। দুই বৃত্তের কেন্দ্রদ্বয় সংযোজক রেখা বৃত্তদ্বয়ের প্রতিসাম্য-অক্ষ।

সঙ্কেত। সংযোজকরেখা বরাবর ভাঁজ করিলে একদিকের অর্ধবৃত্ত দুইটি অপরদিকের অর্ধবৃত্ত দুইটির উপর পরস্পর সমাপতিত হয়।

১১। যে কোন দুইটি বৃত্তের কেন্দ্রসংযোজক সরল রেখা উহাদের সাধারণ জ্যার লম্বদ্বিখণ্ডক।

ধর, S ও S′ বিন্দুদ্বয় ABC ও ABD বৃত্তদ্বয়ের কেন্দ্র ; এবং বৃত্ত দুইটি A ও B বিন্দুতে ছেদিত হইয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে, SS′ রেখা ABর লম্বদ্বিখণ্ডক।

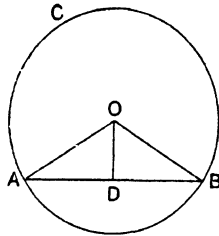
১০ প্রশ্ন হইতে জানা যায় যে কেন্দ্রসংযোজক রেখাটি উভয় বৃত্তের ব্যাস এবং উভয়ের প্রতিসাম্য-অক্ষ। A বিন্দু, S-কেন্দ্র বৃত্তের উপর থাকায় এই বৃত্তের অধোভাগে ইহার প্রতিবিম্ব থাকিবে, আবার, A বিন্দু, S′-কেন্দ্র বৃত্তের উপর থাকায় এই বৃত্তের অধোভাগেও ইহার প্রতিবিম্ব থাকিবে। $\therefore$ A বিন্দুর প্রতিবিম্ব B বিন্দু। অতএব SS′ রেখা AB রেখার লম্বদ্বিখণ্ডক।

চিত্র ২০৭

দ্বিতীয় অধ্যায়

বৃত্তের জ্যা-বিষয়ক উপপাদ্য

উপপাদ্য ৩০ (Theroem 30)

বৃত্তের কেন্দ্র হইতে কোন সরলরেখা অঙ্কন করিলে যদি উহা কেন্দ্রবহির্ভূত কোন জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে তবে ঐ রেখা জ্যা-র উপর লম্ব হইবে ; বিপরীতক্রমে, ঐ সরলরেখা জ্যার উপর লম্ব হইলে উহা জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে।

[If a straight line drawn from the centre of a circle bisects a chord which is not a diameter, it cuts the chord at right angles ; *conversely*, if it cuts the chord at right angles it bisects the chord.]

চিত্র ২০৮

O, ABC বৃত্তের কেন্দ্র, AB কেন্দ্রের বহির্ভূত একটি জ্যা, এবং OD সরলরেখা AB কে D বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, OD, ABর উপর লম্ব।

OA এবং OB যোগ কর।

প্রমাণ। ADO এবং BDO ত্রিভুজদ্বয়ের

AD = BD, (স্বীকার)

OD সাধারণ বাহু,

OA = OB (বৃত্তের ব্যাসার্ধদ্বয়),

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। (উপ. ৭)

অতএব, $\angle ADO = \angle BDO$, এবং উভয়ে সন্নিহিত কোণ হওয়ায়

OD, ABর উপর লম্ব।

বিপরীতক্রমে, মনে কর, OD, ABর উপর লম্ব।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $AD = BD$।

প্রমাণ। ODA, ODB সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের

OA অতিভুজ = OB অতিভুজ (বৃত্তের ব্যাসার্ধদ্বয়)

OD সাধারণ বাহু,

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। (উপ. ১৮)

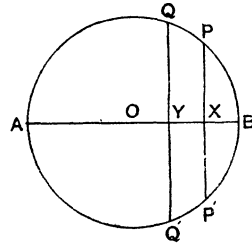
অতএব, $AD = BD$।

অনু. ১। যে সরলরেখা কোন জ্যার সমদ্বিখণ্ডক হইয়া লম্বরূপে অবস্থিত তাহা বৃত্তের কেন্দ্রভেদী।

অনু. ২। কোন সরলরেখা একটি বৃত্তকে দুইটির অধিক বিন্দুতে ছেদ করে না।

অনু. ৩। বৃত্তের যে কোন ব্যাস উহার প্রতিসাম্যাক্ষ।

ধর, O, বৃত্তের কেন্দ্র ; AB একটি ব্যাস ; PP', QQ', জ্যা-গুলি উক্ত ব্যাসের উপর লম্ব।

প্রমাণ। PP', QQ'…জ্যা-গুলি X, Y,……বিন্দুগুলিতে সম-দ্বিখণ্ডিত হইয়াছে।

চিত্র ২০৯

অতএব, বৃত্তটিকে AB-ব্যাস বরাবর ভাঁজ করিলে ABর দুই পার্শ্বের অংশ অঙ্গাঙ্গী মিলিবে।

অনুশীলনী ৩৮

১। 5 সেঃ মিঃ ব্যাসার্ধের একটি বৃত্ত অঙ্কন করিয়া কেন্দ্র হইতে 3 সেঃ মিঃ দূরে একটি জ্যা স্থাপন কর ; জ্যাটির দৈর্ঘ্য কত ?

২। একটি 3″ ব্যাসার্ধের বৃত্তমধ্যে 4″ দৈর্ঘ্য একটি জ্যা আছে, ; কেন্দ্র হইতে ঐ জ্যার মধ্যবিন্দু কতদূরে অবস্থিত ?

৩। দুইটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ 1·5″ ও 2·0″ ; উহারা পরস্পর ছেদ করায় যে সাধারণ জ্যা সৃষ্ট হইয়াছে তাহার দৈর্ঘ্য 2·4″ ; কেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব কত ?

৪। O বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এবং 4·5 সেঃ মিঃ ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কন কর। বৃত্তমধ্যে AB, CD দুইটি জ্যা স্থাপন কর যাহাদের দৈর্ঘ্য 7 ও 8 সেঃ মিঃ। OAB, OCD ত্রিভুজদ্বয়ের ক্ষেত্রফল কত ?

৫। পরস্পর ছেদনকারী বৃত্তদ্বয়ের ব্যাসার্ধ R ও r এবং কেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব D হইলে, দেখাও যে $R \sim r < D < R + r$।

৬। বৃত্তের মধ্যে কোন একটি বিন্দু আছে, বিন্দুটি ভেদ করিয়া এরূপ একটি জ্যার সন্নিবেশ কর যেন বিন্দুটি জ্যার মধ্যবিন্দু হয়।

৭। প্রমাণ কর যে ব্যাসই বৃত্তের বৃহত্তম জ্যা।

(The diameter is the longest chord of a circle.)

৮। কোন বৃত্ত মধ্যে এরূপ একটি জ্যা অঙ্কন কর যাহার দৈর্ঘ্য, কেন্দ্র হইতে জ্যার দূরত্বের দ্বিগুণ হইবে।

৯। দুইটি বৃত্ত পরস্পর ছেদ করিলে যে সাধারণ জ্যা হয়, তাহার মধ্যবিন্দু ও কেন্দ্র দুইটি একই সরলরেখায় অবস্থিত।

১০। প্রমাণ কর যে, সমান্তরাল জ্যা-গুলির মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ একটি সরলরেখা।

(The locus of the mid-points of parallel chords of a circle is a diameter.)

১১। কোন বৃত্তের দুইটি জ্যার মধ্যবিন্দু যোগ করিলে যে রেখা উৎপন্ন হইবে তাহা একটি জ্যার উপর লম্ব হইলে অপরটির উপরও হইবে।

১২। এককেন্দ্রীয় দুই বৃত্তের একটি ছেদক আছে; প্রমাণ কর যে, ছেদকটির বৃত্তদ্বয়ের অন্তর্ভূত অংশ দুইটি পরস্পর সমান।

১৩। দুইটি বৃত্তের ছেদে যে সাধারণ জ্যা হয় তাহা কেন্দ্রদ্বয়সংযোজক রেখার উপর লম্ব।

১৪। AB বৃত্তের একটি ব্যাস ও PQ ইহার একটি জ্যা। A ও B হইতে PQএর উপর যথাক্রমে AX ও BY লম্ব টানা গেল। প্রমাণ কর $PX = QY$।

১৫। দুইটি বৃত্ত A ও B বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে ; এবং ABর একটি সমান্তরাল রেখা বৃত্তগুলিকে যথাক্রমে C, D, E, F বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর $CD = EF$।

১৬। AB, AC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান বাহু ; Aকে কেন্দ্র করিয়া অঙ্কিত একটি বৃত্ত ভূমিকে (বা ইহার বর্ধিত অংশকে) D ও E বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে প্রমাণ কর $BD = EC$।

১৭। একটি বৃত্তের বহির্দেশে অবস্থিত কোন বিন্দু হইতে দুইটি সমান রেখা পরিধি পর্যন্ত টানা গেল; প্রমাণ কর যে, রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণের দ্বিখণ্ডক কেন্দ্র ভেদ করিয়া যাইবে।

১৮। দুইটি বৃত্ত A ও B বিন্দুতে ছেদিত হইয়াছে; এই দুই বিন্দুর মধ্য দিয়া CAD, EBF সমান্তরাল রেখাদ্বয় টানা গেল; ইহারা বৃত্তগুলিকে যথাক্রমে C, D, E, F বিন্দুতে পুনশ্ছেদ করিল। প্রমাণ কর CD = EF।

১৯। দুইটি বৃত্ত A ও B বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে; PAQ যে কোন A-মধ্যগামী রেখা, যাহা পরিধিগুলিকে P, Q বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। দেখাও যে PQএর দৈর্ঘ্য বৃহত্তম হইবে তখন যখন উহা কেন্দ্র-সংযোজক রেখার সহিত সমান্তরালে থাকিবে।

২০। এককেন্দ্রীয় দুই বৃত্তকে অপর একটি বৃত্ত যথাক্রমে P ও Q এবং P′ ও Q′ বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রতিসাম্য ধর্ম হইতে প্রমাণ কর যে

(ক) জ্যা PP′ = জ্যা QQ′;

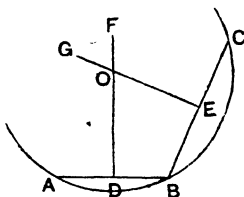
(খ) চাপ PP′ = চাপ QQ′।

২১। দুইটি এক কেন্দ্রীয় বৃত্তকে একটি তৃতীয় বৃত্ত ছেদ করিয়াছে; প্রথম বৃত্তের ছেদ বিন্দু A ও B এবং দ্বিতীয় বৃত্তের ছেদবিন্দু P ও Q। প্রমাণ কর ABQP একটি সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়ম্।

২২। বৃত্তের অন্তঃস্থিত যে বিন্দু হইতে তিনটি সমান সরলরেখা পরিধি পর্যন্ত টানা যায় সেই বিন্দুই ঐ বৃত্তের কেন্দ্র হইবে।

উপপাদ্য ৩১ (Theorem 31)

একই সরলরেখার উপর অবস্থিত নয় এরূপ তিনটি বিন্দুর মধ্য দিয়া একটিমাত্র বৃত্ত অঙ্কন করা যায়।

[One circle and only one can be drawn through three points not in the same straight line.]

চিত্র ২১০

A, B, C তিনটি বিন্দু এবং ইহারা একই সরলরেখার উপর অবস্থিত নহে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে

A, B, C বিন্দুতিনটির মধ্য দিয়া মাত্র একটি বৃত্ত অঙ্কন করা যাইবে।

AB, BC যোগ কর।

AB ও BCর লম্বদ্বিখণ্ডক যথাক্রমে DF ও EG অঙ্কন কর।

প্রমাণ। AB ও BC এক সরলরেখায় অবস্থিত নয়, এজন্য DF, EG সমান্তরাল না হইয়া একটি বিন্দু Oতে ছেদ করিবে।

OD, ABর লম্বদ্বিখণ্ডক হওয়ায় উহা দুই বিন্দু A, ও Bর সমদূরবর্তী বিন্দুসমুদয়ের সঞ্চারপথ। ∴ OA = OB। (উপ. ২২)

সেইরূপ, OE, BCর লম্বদ্বিখণ্ডক হওয়ায় উহা দুই বিন্দু B, ও Cর সমদূরবর্তী বিন্দুসমুদয়ের সঞ্চারপথ। ∴ OB = OC।

∴ OA = OB = OC।

অতএব, O বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া OA ব্যাসার্ধ লইয়া যে বৃত্ত অঙ্কিত হইবে তাহা B ও C বিন্দু দুইটির মধ্য দিয়াও যাইবে।

এবং ∵ OD, OE একটিমাত্র বিন্দুতেই ছেদ করে, এজন্য এই বৃত্তই একমাত্র বৃত্ত যাহা A, B, C দিয়া অঙ্কন করা যাইবে।

অনু. ১। যে সমুদয় বৃত্তের পরিধিস্থ তিন বিন্দু সাধারণ তাহাদের সমাপতন হয়।

অনু. ২। বৃত্তের উপর সংস্থিত যে কোন তিনটি বিন্দু দ্বারা বৃত্তের আকার ও অবস্থান সম্পূর্ণরূপে নির্ণীত হয়।

অনু. ৩। দুইটি বৃত্ত দুইয়ের অধিক বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করে না, করিলে সমাপতন হয়।

কারণ, তিন বিন্দুতে ছেদ করিলে, ঐ তিন বিন্দুর সাহায্যে দুইটি পৃথক্ বৃত্ত অঙ্কিত হওয়া অসম্ভব ; এজন্য বৃত্ত দুইটির পৃথকত্ব থাকে না, এক হইয়া মিলিয়া যায়।

সংজ্ঞা। কোন ত্রিভুজের ত্রি-শীর্ষ দিয়া যে একটি বিশেষ বৃত্ত গিয়াছে তাহাই ত্রিভুজটির **পরিবৃত্ত** (Circum-circle)। ঐ বৃত্তটির কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধকে যথাক্রমে ত্রিভুজটির **পরিকেন্দ্র** (Circum-centre) ও **পরি-ব্যাসার্ধ** (Circum-radius) বলা হয়।

অনুশীলনী ৩৯

১। সমবাহু ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র বাহু তিনটি হইতে সমান দূরে অবস্থিত।

২। বর্গক্ষেত্রের চারি শীর্ষ দিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কন করা যাইতে পারে। সেই বৃত্তের কেন্দ্র কোথায় ?

৩। আয়তক্ষেত্রের শীর্ষগুলি দিয়া কোন বৃত্ত অঙ্কিত করা যায় কিনা, কারণ দেখাও।

৪। AB, AC, কোন বৃত্তের সমান জ্যা ; প্রমাণ কর যে BAC কোণের দ্বিখণ্ডক বৃত্ত ABCর কেন্দ্র ভেদ করিয়া যাইবে।

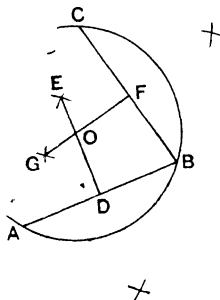
৫। বৃত্তের পরিধিস্থ কোন বিন্দু হইতে দুইটি সমান জ্যা টানা হইলে তাহারা ঐ বিন্দু ও কেন্দ্রের সংযোজক রেখার সহিত সমান নত হইবে।

৬। দুইটি স্থির বিন্দু আছে ; ঐ বিন্দুদ্বয়ের মধ্য দিয়া যে সমুদয় বৃত্ত অঙ্কিত হইবে তাহাদের কেন্দ্রগুলির সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

———

সম্পাদ্য ১৭ (Problem 17)

কোন নির্দিষ্ট বৃত্তের (কিংবা চাপের) কেন্দ্র নির্ণয় করিতে হইবে।

[To find the centre of a given circle, or of a given arc.]

চিত্র ২২১

ABC একটি চাপ, উহার কেন্দ্র নির্ণয় করিতে হইবে।

অঙ্কন। ইচ্ছামত AB, BC দুইটি জ্যা লও, তাহাদের লম্বদ্বিখণ্ডক, যথাক্রমে DE, FG অঙ্কন কর। (সম্পাদ্য ২.)

ধর, DE, FG পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করিল।

তাহা হইলে O নির্ণেয় কেন্দ্র হইবে।

প্রমাণ। ∵ DE, ABর লম্বদ্বিখণ্ডক, ইহার প্রত্যেক বিন্দু A ও B হইতে সমদূরবর্তী ;

∴ OA = OB।

∵ FG, BCর লম্বদ্বিখণ্ডক, ইহার প্রত্যেক বিন্দু B ও C হইতে সমদূরবর্তী ;

∴ OB = OC।

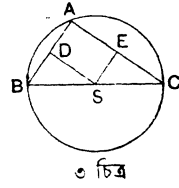
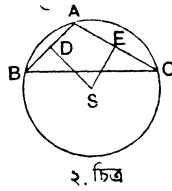
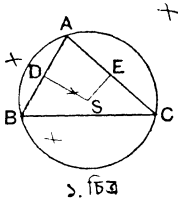
∴ OA = OB = OC ;

অর্থাৎ O বিন্দুটি, ABC বৃত্তের (বা চাপের) কেন্দ্র।

———

সম্পাদ্য ১৮ (Problem 18)

কোন নির্দিষ্ট ত্রিভুজের একটি পরিবৃত্ত অঙ্কন করিতে হইবে।

[To circumscribe a circle about a given triangle.]

চিত্র ২১২

ABC একটি ত্রিভুজ। উহার পরিবৃত্ত অঙ্কন করিতে হইবে।

অঙ্কন। AB, AC ভুজের লম্বদ্বিখণ্ডক যথাক্রমে DS ও ES টান ; এবং মনে কর ইহারা S বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করে। S বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া SA ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তাঙ্কন কর। এই বৃত্তটি A, B ও Cর মধ্য দিয়া যাইবে ; অর্থাৎ, ইহা ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্ত হইবে।

প্রমাণ। DS রেখার প্রতি বিন্দু A ও B হইতে সমদূরবর্তী, এবং ES রেখার প্রতি বিন্দু A ও C হইতে সমদূরবর্তী।

∴ DS, ES রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু O, তিনটি বিন্দু A, B, C হইতে সমদূরবর্তী।

সুতরাং, Sকে কেন্দ্র করিয়া SA ব্যাসার্ধ লইয়া যে বৃত্ত অঙ্কিত হইবে তাহা A, B, C বিন্দুর মধ্য দিয়া যাইবে।

মন্তব্য ১। S বিন্দু ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র। SA = SB = SC = R (পরিব্যাসার্ধ)।

২। সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র ত্রিভুজের মধ্যস্থ হইবে (১. চিত্র) স্থূলকোণী ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র বহিঃস্থ হইবে, এবং ত্রিভুজের যেটি স্থূলকোণ তাহার সংমুখে থাকিবে (২. চিত্র); সমকোণী ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র অতিভুজের উপরেই থাকিবে এবং ইহার মধ্যবিন্দু হইবে (৩. চিত্র)।

৩। ত্রিভুজের তিনটি বাহুর লম্বদ্বিখণ্ডক একটি বিন্দুতে মিলিত হয়, অতএব লম্বত্রয় সমবিন্দু ও পরিকেন্দ্রভেদী।

অনুশীলনী ৪০

১। ১৮, সম্পাদ্যের ১. চিত্রে, SA, SB, SCকে ব্যাস করিয়া তিনটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। দেখাও যে,

(ক) প্রথম বৃত্ত E ও D বিন্দু দিয়া যাইবে, দ্বিতীয় বৃত্ত D ও F দিয়া যাইবে এবং তৃতীয় বৃত্ত F ও E বিন্দু দিয়া যাইবে। (F, BCর মধ্যবিন্দু)

এবং (খ) প্রত্যেক বৃত্তের ব্যাসার্ধ পরিলিখিত বৃত্তটির ব্যাসার্ধের অর্ধেক।

২। 2″ ভূমির উপর একটি সমবাহু ত্রিভুজ আঁক। উহার পরিবৃত্ত অঙ্কিত করিয়া পরি-ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য মাপ।

৩। ΔPQR আঁক যেন $PQ = 6$ সেঃ মিঃ, $P = 30°$, $\angle R = 45°$ হয়। পরিবৃত্ত আঁকিয়া পরিব্যাসার্ধ মাপ।

৪। একটি ত্রিভুজের ভূমি, উচ্চতা ও পরিব্যাসার্ধ দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

[Given the base, the altitude, and the circum-radius, to construct the triangle.]

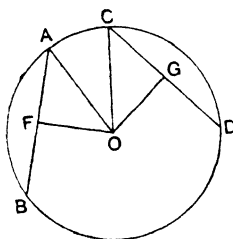
[ভূমির প্রান্তবিন্দুদ্বয় নির্ণেয় ত্রিভুজের দুইটি শীর্ষবিন্দু ; পরিবৃত্ত ও ভূমির সমান্তরাল একটি সরলরেখা তৃতীয় শীর্ষবিন্দুর দুইটি সঞ্চারপথ।]

৫। ABCD একটি চতুর্ভুজ ; ইহার কর্ণদ্বয় AC ও BD পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। S_1, S_2, S_3 ও S_4 যথাক্রমে AOB, BOC, COD ও DOA ত্রিভুজ চারিটির পরিকেন্দ্র। প্রমাণ কর যে $S_1 S_2 S_3 S_4$ চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক।

৬। একটি সমবাহু ত্রিভুের বাহু a একক দীর্ঘ হইলে, ইহার পরিব্যাসার্ধ $\frac{a}{\sqrt{3}}$ একক দীর্ঘ হইবে।

উপপাদ্য ৩২ (Theorem 32)

বৃত্তের সমান সমান জ্যা উহার কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্তী ; বিপরীতপক্ষে, কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্তী জ্যা-গুলি পরস্পর সমান।

[Equal chords of a circle are equidistant from the centre. *Conversely*, chords which are equidistant from the centre are equal. *Euc. 3.* 14.]

চিত্র ২১৩

O বৃত্তের কেন্দ্র ; AB ও CD বৃত্তের দুইটি সমান জ্যা ; এবং OF, OG যথাক্রমে AB ও CDর উপর লম্ব।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, OF = OG।

OA, OC যোগ কর।

প্রমাণ। যেহেতু OF, AB জ্যার উপর লম্ব,

∴ OF, ABকে সমদ্বিখণ্ডিত করে ; [উপ. ৩০]

অর্থাৎ AF = $\frac{1}{2}$ AB।

সেইরূপে, CG = $\frac{1}{2}$ CD।

কিন্তু AB = CD (স্বীকার)

∴ AF = CG।

অতঃপর, OFA, OGC সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের

অতিভুজ OA = অতিভুজ OC,

AF = CG ; [প্রমাণিত]

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। [উপ. ১৮]

অতএব, OF = OG।

বিপরীতপক্ষে,

মনে কর, OF = OG।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, AB = CD।

প্রমাণ। OFA ও OGC সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের

অতিভুজ OA = অতিভুজ OC,

OF = OG ;

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। [উপ. ১৮]

অতএব AF = CG।

কিন্তু $AF = \frac{1}{2} AB$

এবং $CG = \frac{1}{2} CD$

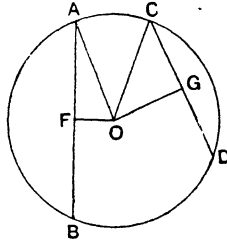
∴ AB = CD। [সমান সমান বস্তুর দ্বিগুণ]

অনু. ১। সমান সমান বৃত্তের সমান সমান জ্যা কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্তী।

অনু. ২। সমান সমান বৃত্তের যে সমুদয় জ্যা কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্তী তাহারা পরস্পর সমান।

উপপাদ্য ৩৩ (Theorem 33)

বৃত্তের দুইটি জ্যার মধ্যে কেন্দ্রের অধিকতর সমীপবর্তী জ্যা অপেক্ষাকৃত দূরবর্তী জ্যা হইতে বৃহত্তর; বিপরীতপক্ষে, বৃহত্তর ও ক্ষুদ্রতর জ্যাদ্বয়ের মধ্যে বৃহত্তরটি ক্ষুদ্রতরটি হইতে কেন্দ্রের অধিকতর সমীপবর্তী।

[Of any two chords of a circle, that which is nearer to the centre is greater than one more remote ; *conversely*, the greater of two chords of a circle is nearer to the centre than the less. *Euc.* 3.15.]

চিত্র ২১৪

O বৃত্তের কেন্দ্র ; AB ও CD জ্যাদ্বয়। O হইতে AB ও CDর উপর যথাক্রমে OF ও OG দুইটি লম্ব।

প্রমাণ করিতে হইবে যে

(ক) $OF < OG$ হইলে, $AB > CD$ হইবে ;

এবং, বিপরীত পক্ষে, (খ) $AB > CD$ হইলে, $OF < OG$ হইবে।

OA, OC যোগ কর।

প্রমাণ। যেহেতু OF, ABর উপর লম্ব,

∴ OF, ABকে সমদ্বিখণ্ডিত করে ; [উপ. ৩০]

∴ $AF = \frac{1}{2} AB$ ।

সেইরূপে, $CG = \frac{1}{2} CD$ ।

অতঃপর, $\because OA = OC$, $\therefore OA^2 = OC^2$;

কিন্তু, $\because \angle OFA =$ এক সমকোণ,

$\therefore OA^2 = OF^2 + FA^2$ । [পীথা. উপ.]

সেইরূপে, $OC^2 = OG^2 + GC^2$ ।

অতএব, $OF^2 + FA^2 = OG^2 + GC^2$ ।

(ক) কিন্তু স্বীকার যে $OF < OG$;

$\therefore OF^2 < OG^2$;

$\therefore FA^2 > GC^2$;

$\therefore FA > GC$;

$\therefore AB > CD$ ।

(খ) পক্ষান্তরে, স্বীকার যে $AB > CD$;

$\therefore FA > CG$;

$\therefore FA^2 > CG^2$,

$\therefore OF^2 < OG^2$;

$\therefore OF < OG$ ।

অনুসিদ্ধান্ত। কোন বৃত্তের বৃহত্তম জ্যা উহার ব্যাস ।

অনুশীলনী ৪১

১। 1·8″ ব্যাসার্ধের একটি বৃত্ত অঙ্কন কর ; এবং ইহার মধ্যে দুইটি 2·6″ পরিমাণ জ্যা সন্নিবেশ করিয়া তাহাদের কেন্দ্র হইতে দূরত্ব নির্ণয় কর।

২। 2·5″ ব্যাসার্ধের একটি বৃত্তের কেন্দ্র হইতে 1·5″ দূরে অবস্থিত একটি বিন্দু লও। ঐ বিন্দুর মধ্য দিয়া সর্বাপেক্ষা ক্ষুদ্র জ্যা কোন্‌টি ? ইহার দৈর্ঘ্য কত ?

৩। যদি কোন বৃত্তের একটি 3·2″ পরিমাণ জ্যা কেন্দ্র হইতে 1·2″ দূরে থাকে, তবে 1·5″ দূরবর্তী কোন জ্যার দৈর্ঘ্য কত হইবে ?

৪। 2″ ব্যাসার্ধের একটি বৃত্ত লও, ইহার মধ্যে 3″ দৈর্ঘ্যের 12টি জ্যা বসাইয়া জ্যাগুলির মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ অঙ্কন কর।

৫। কোন বৃত্তের (কেন্দ্র O) অর OP$=1''$ এবং জ্যা PQ$=1\cdot5''$ অঙ্কন করিয়া এমন একটি জ্যা অঙ্কন কর যাহা PQএর সমান কিন্তু OPর উপর লম্ব।

৬। কোন বৃত্তের (কেন্দ্র O) সমান জ্যাদ্বয় AB, CD পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করিলে OP রেখা জ্যা দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণের দ্বিখণ্ডক হইবে ; এবং উক্ত জ্যাদ্বয়ের একটির অংশদ্বয় অপরটির অংশদ্বয়ের সহিত যথাক্রমে সমান হইবে।

৭। PQ কোন বৃত্তের ব্যাস ; PA, QB দুইটি সমান জ্যা PQ এর পরস্পর বিপরীত দিকে প্রসারিত। প্রমাণ কর PA ‖ QB।

৮। দুইটি এককেন্দ্রীয় বৃত্তকে কোন রেখা P, Q, R, S বিন্দুচতুষ্টয়ে ছেদ করিলে, PQ = RS হইবে।

৯। কোন বৃত্তের সমান সমান জ্যা-গুলির মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ একটি এককেন্দ্রীয় বৃত্ত হইবে।

[The locus of the middle points of equal chords of a circle is a concentric circle.]

১০। বৃত্তের অন্তরস্থিত কোন একটি নির্দিষ্ট বিন্দুর ভিতর দিয়া একটি নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের সমান একটি জ্যা স্থাপন কর। (কখন ইহা অসম্ভব হইবে ?)

১১। কোন নির্দিষ্ট জ্যার সমান অপর একটি জ্যা বৃত্তমধ্যে সন্নিবেশ কর যাহাতে উভয়ে 30°তে নত হয়।

১২। কোন নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের এমন একটি জ্যা একটি বৃত্তে অঙ্কন কর যাহাতে ইহা কোন একটি স্থির সরলরেখার সহিত সমান্তরাল হয়।

১৩। একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ $5''$; কেন্দ্র হইতে $3''$ দূরে একটি বিন্দুর মধ্য দিয়া এরূপ একটি জ্যা অঙ্কন কর যাহা সর্বাপেক্ষা ক্ষুদ্র হইবে।

১৪। AB, CD একটি বৃত্তের সমান্তরাল জ্যাদ্বয় ; বৃত্তটির ব্যাসার্ধ $2\cdot5$ সেঃ মিঃ। জ্যা দুইটি কেন্দ্রের এক পার্শ্বে অবস্থিত। যদি AB$=3$ সেঃ মিঃ, CD$=1\cdot4$ সেঃ মিঃ হয়, তবে জ্যা দুইটির দূরত্ব কত ? অঙ্কন ও পরিমাপ দ্বারা গণনার সমর্থন কর।

১৫। কোন বৃত্তের অন্তর্ভুক্ত একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে এমন দুইটি সমান জ্যা নির্ণয় কর যাহাদের মধ্যবর্তী কোণ একটি সমকোণ।

১৬। কোন বৃত্তের সমান দুইটি জ্যা পরস্পর ছেদ করিয়াছে ; জ্যাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত সন্নিহিত কোণদ্বয়ের দ্বিখণ্ডক অপর দুইটি জ্যা। প্রমাণ কর যে শেষোক্ত জ্যাদ্বয়ের একটি অপরটির লম্বদ্বিখণ্ডক।

১৭। কোন বৃত্তের MN একটি নির্দিষ্ট জ্যা এবং AB যে কোন একটি ব্যাস। দেখাও যে A ও B হইতে MNএর উপর লম্ব দুইটির দৈর্ঘ্যসমষ্টি ধ্রুবক (constant)।

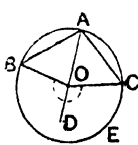
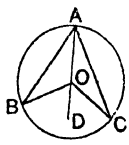
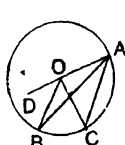
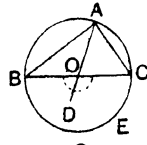
[লম্ব দুইটির অবস্থান দিক্ (sense) বিবেচ্য ; প্রয়োজন মত MNকে বর্ধিত করা যাইতে পারে।]

তৃতীয় অধ্যায়

বৃত্তের কোণ, চাপ ও জ্যা

উপপাদ্য ৩৪ (Theorem 34)

বৃত্তের একই চাপের উপর অবস্থিত কেন্দ্রস্থ কোণ পরিধিস্থ কোণের দ্বিগুণ।

(The angle at the centre of a circle is twice the angle at the circumference standing on the same arc. *Euc. 3. 20.*)

চিত্র ২১৫

O, ABC বৃত্তের কেন্দ্র; BC চাপের উপর অবস্থিত, কেন্দ্রস্থ কোণ BOC, এবং পরিধিস্থ কোণ BAC।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$\angle BOC = 2\ \angle BAC \text{।}$$

অঙ্কন। AO যোগ করিয়া D পর্যন্ত বর্ধিত কর।

প্রমাণ। OAB ত্রিভুজের,

$$\because OA = OB$$

$$\therefore \angle OAB = \angle OBA\,;$$

কিন্তু বহিঃস্থ কোণ $\angle BOD = \angle OAB + \angle OBA$

$$\therefore \quad \angle BOD = 2\ \angle OAB \cdots (১)$$

এবং এইরূপে, $\angle COD = 2\ \angle OAC \cdots (২)$

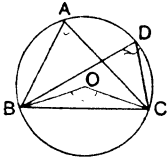
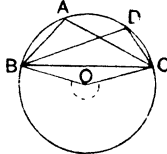
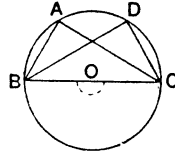
সুতরাং ১ম, ২য় ও ৪র্থ চিত্রে (১) ও (২) এর 'সমষ্টি' এবং ৩য় চিত্রে, (১) ও (২) এর 'অন্তর' হইতে জানা গেল যে

$$\angle BOC = 2\ \angle BAC \text{।}$$

দ্রষ্টব্য। ৪. চিত্রে পরিধিস্থ কোণ সরলকোণের অর্ধেক হওয়ায় একটি সমকোণের সমান হইয়াছে। এতদ্বারা প্রমাণ হয় যে অর্ধবৃত্তস্থ কোণ সমকোণ। (ইহার বৈকল্পিক প্রমাণ ৩৯. উপপাদ্যে বর্ণিত হইবে)

উপপাদ্য ৩৫ (Theorem 35)

একই বৃত্তাংশস্থিত যাবতীয় কোণ পরস্পর সমান।

[Angles in the same segment of a circle are equal. *Euc. 3.21.*]

চিত্র ২১৬

O, ABC বৃত্তের কেন্দ্র ;

এবং ∠BAC ও ∠BDC, BADC বৃত্তাংশস্থ যে কোন দুইটি কোণ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$\angle BAC = \angle BDC \text{ ।}$$

OB, OC যোগ কর।

প্রমাণ। যেহেতু, BC চাপের উপর অবস্থিত ∠BOC কেন্দ্রস্থ কোণ ও ∠BAC পরিধিস্থ কোণ ;

∴ ∠BOC = 2∠BAC , (উপ. ৩৪)

সেইরূপে, ∠BOC = 2∠BDC ;

∴ ∠BAC = ∠BDC ।

অনু.। কোন ত্রিভুজের BC ভূমি নির্দিষ্ট থাকিলে তদুপরি সমান শিরঃকোণ বিশিষ্ট যত ত্রিভুজ অঙ্কিত হইবে তাহাদের পরিবৃত্তটি নির্দিষ্ট; সুতরাং তাহাদের পরিকেন্দ্রের কোন **সঞ্চারপথ** নাই; ইহা একটি **স্থিরবিন্দু**।

মন্তব্য। ১. চিত্রে বৃত্তাংশটি বৃত্তার্ধ হইতে বৃহত্তর, ২ চিত্রে উহা বৃত্তার্ধ হইতে ক্ষুদ্রতর, এবং ৩ চিত্রে উহা বৃত্তার্ধের সমান ; এজন্য, কেন্দ্রস্থ কোণগুলি যথাক্রমে স্থূল (বা সূক্ষ্ম) কোণ, প্রবৃদ্ধকোণ এবং সরলকোণ। সব ক্ষেত্রেই উক্ত প্রমাণ প্রযোজ্য ।

অনুশীলনী ৪২

১। XY কোন বৃত্তের ব্যাস ; P এরূপ একটি পরিধিস্থ বিন্দু যে $\angle PXY = 50°$; যদি Q অপর বৃত্তার্ধের (Pএর বিপরীত দিকে) একটি পরিধিস্থ বিন্দু হয়, তবে $\angle PQY$ = কত ডিগ্রি ?

২। AB কোন বৃত্তের (যাহার কেন্দ্র O) ব্যাস ; C পরিধিস্থ বিন্দু ; $\angle OBC = 31°$। $\angle OAC$ কত ?

৩। কোন বৃত্তের অন্তর্লিখিত ত্রিভুজ ABCর AB বাহু ব্যাসার্ধের সমান। $\angle C$ কত ?

৪। ABC সমবাহু ত্রিভুজের পরিলিখিত বৃত্তের একটি ব্যাস AP। $\angle PAB$র পরিমাণ কত ডিগ্রি ?

৫। ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের $\angle BAC = 62°$, $\angle DBC = 45°$, $\angle ACB = 28°$; প্রমাণ কর AD = DC।

৬। PQRST, কোন বৃত্তের অন্তর্লিখিত পঞ্চভুজ ; ইহার PQ = QR, $\angle Q = 140°$, $\angle QRT = 50°$। $\angle RST$ = কত ডিগ্রি ?

৭। কোন বৃত্তের BA, CD জ্যাদ্বয় সমান্তরাল ; BD, AC বৃত্তের অন্তঃস্থ X বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর BX = AX।

৮। কোন বৃত্তের AB, CD জ্যা দুইটি সমান্তরাল। প্রমাণ কর, $\triangle ACD \equiv \triangle BDC$।

৯। AB, CD জ্যাদ্বয় X বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর $\triangle AXD$, ও $\triangle BXC$ সদৃশকোণী।

১০। AB, CD কোন বৃত্তের সমান্তরাল জ্যা, E বিন্দু BD চাপের মধ্যবিন্দু ; AE রেখা CDর বর্ধিতাংশকে F বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। দেখাও $\triangle CEF$ সমদ্বিবাহু।

১১। ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের AB = BC। দেখাও $\angle ADB = \angle BDC$।

১২। কোন বৃত্তের (কেন্দ্র O) দুইটি জ্যা PR ও QS পরস্পর X বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর $\angle POQ + \angle ROS = 2\angle PXQ$।

১৩। AB একটি বৃত্তের নির্দিষ্ট জ্যা এবং P বৃত্তস্থ যে কোন বিন্দু। প্রমাণ কর $\angle ABP + \angle BAP$ = ধ্রুবক।

১৪। দুইটি বৃত্ত পরস্পর A ও B বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। A বিন্দুর ভিতর দিয়া অঙ্কিত এবং বৃত্তদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ যে কোন সরল রেখার সম্মুখস্থ B বিন্দুস্থ কোণটি ধ্রুবক হইবে।

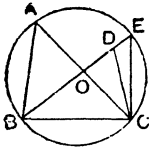
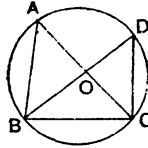
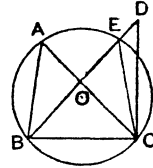
১৫। দুইটি বৃত্ত পরস্পর X ও Y বিন্দুতে ছেদ করে। Xএর ভিতর দিয়া অঙ্কিত দুইটি রেখা APB ও CPD বৃত্তদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ হইল। প্রমাণ কর $\angle AQC = \angle BQD$.

১৬। দুইটি বৃত্ত P ও Q বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। APB একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা বৃত্তদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ। SPR আর একটি যে কোন সরল রেখা P বিন্দুর ভিতর দিয়া অঙ্কিত ও বৃত্তদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ। প্রমাণ কর AS ও RB যে বিন্দুতে ছেদ করিবে সেখানে একটি ধ্রুবক কোণ উৎপন্ন হইবে।

———

উপপাদ্য ৩৬ (Theorem 36)

নির্দিষ্ট দুইটি বিন্দুর সংযোজক সরলরেখা একই পার্শ্বে অপর দুইটি বিন্দুতে সমান সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করিলে, চারিটি বিন্দুই বৃত্তস্থ হইবে।

[If the straight line joining two fixed points subtends equal angles at two other points on the same side of it, the four points are concyclic.]

চিত্র ২১৭

O, বৃত্তের কেন্দ্র ; নির্দিষ্ট বিন্দু B ও C এর সংযোজক সরলরেখা BC, একই পার্শ্বে A ও D বিন্দুতে BAC, BDC দুই সমান সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, B, C, D, A বৃত্তস্থ।

অঙ্কন। A, B, Cর মধ্য দিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। (সম্পাদ্য. ১৭)

প্রমাণ। যদি উক্ত বৃত্ত D বিন্দুর মধ্য দিয়া গমন না করে, তবে বিন্দুটি বৃত্তের অন্তঃস্থ বা বহিঃস্থ হইবে।

যদি D অন্তঃস্থ হয়, তবে BDকে বর্ধিত করিলে পরিধিকে E বিন্দুতে ছেদ করিবে (১. চিত্র)। EC যোগ কর।

∴ $\angle BAC = \angle BEC$। (উপ. ৩৫)
কিন্তু, $\angle BAC = \angle BDC$; (স্বীকার)
∴ $\angle BDC = \angle BEC$।

ইহা অসম্ভব, কারণ DC, EC সমান্তরাল নহে এবং EDC ত্রিভুজের বহিঃকোণ অন্তঃকোণের সমান হইতে পারে না। (উপ. ৮)

অতএব, D, ABC বৃত্তের অন্তঃস্থ হইতে পারে না।

সেইরূপ, ৩ চিত্র হইতে দেখান যাইতে পারে যে, D, ABC বৃত্তের বহিঃস্থও হইতে পারে না।

সুতরাং, D বিন্দু ABC বৃত্তের পরিধিস্থ হইবে (২. চিত্র) ;

অর্থাৎ B, C, D, A চারিটি বিন্দুই বৃত্তস্থ।

অনুসিদ্ধান্ত। নির্দিষ্ট ভূমির উপর ও তাহার এক পার্শ্বে অবস্থিত সমশিরঃ-কোণ-বিশিষ্ট ত্রিভুজ সমুদয়ের শীর্ষবিন্দুগুলির সঞ্চারপথ এমন একটি বৃত্তের চাপ যাহার সীমান্তবিন্দুদ্বয় ভূমিরই সীমান্তবিন্দু হইবে।

মন্তব্য। এই উপপাদ্যটি ৩৫ উপপাদ্যের বিপরীত।

অনুশীলনী ৪৩

১। AB ও CD পরস্পর X বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। যদি AX = CX এবং BX = DX হয়, দেখাও যে A, B, D, C বৃত্তস্থ।

২। $\triangle ABC$র $\angle A = 40°$, $\angle C = 70°$। $\triangle BXC$র $\angle BCX = 90°$, এবং BX, $\angle ABC$র দ্বিখণ্ডক। দেখাও B, A, X, C সমপরিধিস্থ।

৩। ABCD চতুর্ভুজের AB = BC, $\angle ABC = 136°$, $\angle BDC = 22°$। দেখাও যে ABCD বৃত্তস্থ।

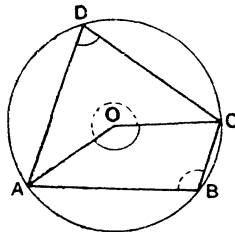
৪। $\triangle ABC$র AF, BE দুইটি উন্নতি। প্রমাণ কর $\angle BAF = \angle BEF$।

৫। একটি ত্রিভুজের ভূমি ও শীর্ষকোণ ধ্রুবক। ইহার শীর্ষবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

৬। একটি বৃত্তের স্থির জ্যা AB এবং ABC একটি অন্তর্লিখিত ত্রিভুজ। A ও B হইতে যথাক্রমে BC ও CA এর উপর অঙ্কিত লম্বদ্বয় O বিন্দুতে ছেদ করে। O বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

উপপাদ্য ৩৭ (Theorem 37)

বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টি দুই সমকোণ।

[The opposite angles of a cyclic quardrilateral are together equal to two right angles. *Euc. 3.* 22]

চিত্র ২১৮

O, ABC বৃত্তের কেন্দ্র; এবং ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

(ক) $\angle ADC + \angle ABC$ = দুই সমকোণ।

(খ) $\angle BAD + \angle BCD$ = দুই সমকোণ।

OA, OC যোগ কর।

প্রমাণ। ABC চাপের উপর $\angle AOC$ কেন্দ্রস্থ এবং $\angle ADC$ পরিধিস্থ।

∴ $\angle AOC = 2\angle ADC$। (উপ. ৩৪)

সেইরূপ, ADC চাপের উপর প্রবৃদ্ধ $\angle AOC$ কেন্দ্রস্থ এবং $\angle ABC$ পরিধিস্থ।

∴ প্রবৃদ্ধ $\angle AOC = 2\angle ABC$।

অতএব, $2\angle ADC + 2\angle ABC = \angle AOC +$ প্রবৃদ্ধ $\angle AOC$

= চারি সমকোণ;

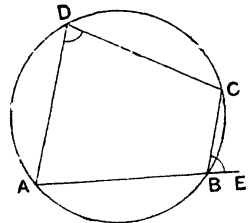
∴ $\angle ADC + \angle ABC$ = দুই সমকোণ।

তদ্রূপ, OB, OD যোগ করিয়া দেখান যাইবে যে

$\angle BAD + \angle BCD$ = দুই সমকোণ।

অনুসিদ্ধান্ত। বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের এক বাহু বর্ধিত করিয়া যে বহিঃকোণ উৎপন্ন হয় তাহা চতুর্ভুজের বিপরীত অন্তঃকোণের সমান।

[If one side of a cyclic quadrilateral is produced, the exterior angle so formed is equal to the interior opposite angle.]

কারণ (পার্শ্ব চিত্রে), $\angle CBA, \angle CDA$র সম্পূরক; এবং $\angle CBA$, $\angle CBE$ এর সম্পূরক। অতএব $\angle CBE = \angle CDA$।

চিত্র ২১৯

অনুশীলনী ৪৪

১। ABCDE একটি বৃত্তস্থ পঞ্চভুজ, AE॥BC, $\angle ACB=46^\circ$ এবং $\angle BCD=108^\circ$। $\angle CDE=$ কত ডিগ্রি ?

২। ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ ; CB=CA, $\angle BCA=52^\circ$, $\angle ACD=38^\circ$। $\angle ADC=$ কত ডিগ্রি ? $\angle DAC=$ কত ডিগ্রি ?

৩। ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের AB ॥ CD, $\angle DAC=72^\circ$, $\angle CAB=40^\circ$। $\angle B=$ কত ডিগ্রি ?

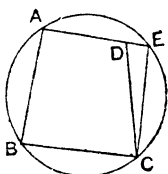
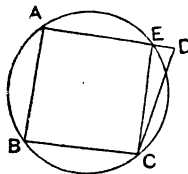
৪। ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের $\angle ABC=116^\circ$, $\angle DAC=43^\circ$, $\angle BDC=17^\circ$ প্রমাণ কর উহার কর্ণদ্বয় পরস্পর সমকোণে নত।

৫। ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের AD,BC বর্ধিত হইয়া F বিন্দুতে, এবং AB,DC বর্ধিত হইয়া E বিন্দুতে ছেদ করে। $\angle ADC=95^\circ$, $\angle DFC=37^\circ$ হইলে $\angle E=$ কত ডিগ্রি ?

৬। কোন বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বিপরীত দুইটি বাহু সমান্তরাল হইলে অপর দুই বাহু সমান হইবে এবং কর্ণদ্বয়ও পরস্পর সমান হইবে।

উপপাদ্য ৩৮ (Theorem 38)

যে চতুর্ভুজের বিপরীত কোণ দুইটি পরস্পর সম্পূরক তাহা বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

[If a pair of opposite angles of a quadriliteral be supplementary, the quadrilateral is cyclic.]

১. চিত্র

২. চিত্র

চিত্র ২২০

ABCD চতুর্ভুজের $\angle B$, $\angle D$ পরস্পর সম্পূরক।

প্রমাণ করিতে হইবে যে চতুর্ভুজটি বৃত্তস্থ।

অঙ্কন। A,B,C বিন্দু দিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর।

প্রমাণ। যদি উক্ত বৃত্ত D বিন্দুর মধ্য দিয়া গমন না করে, তবে বিন্দুটি বৃত্তের অন্তঃস্থ বা বহিঃস্থ হইবে।

যদি বহিঃস্থ হয় তবে AD যোগ করিলে পরিধিকে E বিন্দুতে ছেদ করিবে (২. চিত্র)। EC যোগ কর।

$\angle ABC + \angle AEC =$ দুই সমকোণ; (উপ. ৩৭)

কিন্তু, $\angle ABC + \angle ADC =$ দুই সমকোণ। (স্বীকার)

অতএব $\angle AEC = \angle ADC$।

ইহা অসম্ভব, কারণ EC, DC সমান্তরাল নহে এবং EDC ত্রিভুজের বহিঃকোণ E, অন্তঃকোণ D এর সহিত সমান হইতে পারে না।

∴ D, ABC বৃত্তের বহিঃস্থ নয়।

সেইরূপ ১. চিত্র হইতে প্রমাণিত হইবে যে, D, ABC বৃত্তের অন্তঃস্থও নয়।

সুতরাং, D বিন্দু ABC বৃত্তের পরিধিস্থ।

অর্থাৎ, ABCD চতুর্ভুজটি বৃত্তস্থ।

অনুসিদ্ধান্ত। কোন চতুর্ভুজের এক বাহু বর্ধিত করিয়া যে বহিঃকোণ হয় তাহা যদি উহার বিপরীত অন্তঃকোণের সমান হয় তবে চতুর্ভুজটি বৃত্তস্থ। (চিত্র ২১৯ দ্রষ্টব্য)

কারণ, যদি $\angle CBE = \angle ADC$ হয়, তবে $\angle ADC + \angle CBA =$ দুই সমকোণ। অতএব ৩৮ উপপাদ্য অনুসারে চতুর্ভুজটি বৃত্তস্থ।

মন্তব্য। এই প্রতিজ্ঞাটি ৩৭ উপপাদ্যের বিপরীত।

অনুশীলনী ৪৫

১। নিম্নলিখিত ক্ষেত্রগুলির কোন্ কোন্‌টি বৃত্তস্থ ?
(১) সামান্তরিক, (২) আয়তক্ষেত্র, (৩) বর্গক্ষেত্র, (৪) রম্বস্, (৫) ট্রাপিজিয়ম্, ও (৬) সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়ম্।

২। MNO ত্রিভুজের MN = MO। যদি NOর সমান্তরাল রেখা MN ও MOকে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে, তবে P, Q, O, N বৃত্তস্থ হইবে।

৩। প্রমাণ কর যে কোন ত্রিভুজের দুইটি বাহুকে ব্যাস করিয়া যে বৃত্তদ্বয় অঙ্কিত হইবে তাহারা তৃতীয় বাহুতে পরস্পর ছেদ করিবে।

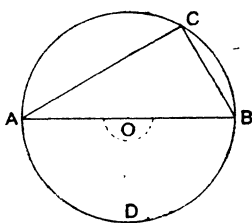
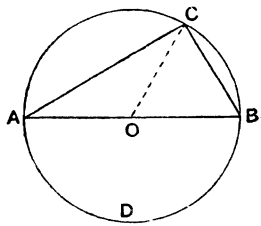
(Prove that the circles drawn on two sides of a triangle as diameters intersect on the third side.)

৪। ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের AB ∥ CD; AB-জ্যা ক্ষুদ্রতর। DA ও CB বর্ধিত হইয়া T বিন্দুতে মিলিত হইলে DA = BC হইবে। (অনু. ৪৪. প্রশ্ন ৬. দ্রষ্টব্য)

৫। কোন বৃত্তের (কেন্দ্র O) পরিধিস্থ A একটি বিন্দু। AP, AQ জ্যা-দ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে X, Y হইলে, $\angle OXY = \angle OAY$ হইবে।

উপপাদ্য ৩৯ (Theorem 39)

অর্ধবৃত্তস্থ কোণ সমকোণ।

[The angle in a semi-circle is a right angle. *Euc. 3.* 31.]

১. চিত্র

২. চিত্র

চিত্র ২২১

O, ABC বৃত্তের কেন্দ্র, AB উহার ব্যাস এবং ∠ACB অর্ধবৃত্তস্থ কোণ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে

∠ACB = এক সমকোণ।

প্রমাণ। ADB চাপের উপর ∠ACB পরিধিস্থ এবং সরল ∠AOB কেন্দ্রস্থ। (১. চিত্র দ্রষ্টব্য)

∴ ∠AOB = 2∠ACB; (উপ. ৩৪)

কিন্তু, ∠AOB = দুই সমকোণ।

∴ ∠ACB = এক সমকোণ।

অতএব অর্ধবৃত্তস্থ কোণ = এক সমকোণ।

বিকল্প প্রমাণ। (২. চিত্র দ্রষ্টব্য)

OC যোগ কর।

∠OAC = ∠OCA (∵ OA = OC);

∠OBC = ∠OCB (∵ OB = OC);

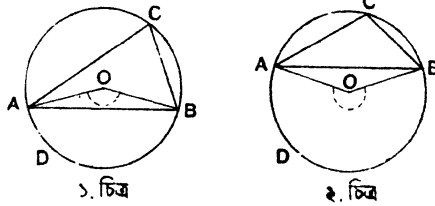
∴ ∠OAC + ∠OBC = ∠OCA + ∠OCB = ∠ACB।

কিন্তু, △ABC এর ∠A + ∠B + ∠C = দুই সমকোণ।

∴ ∠ACB = এক সমকোণ।

উপপাদ্য ৪০ (Theorem 40)

অর্ধবৃত্তাপেক্ষা বৃহত্তর বৃত্তাংশস্থ কোণ সূক্ষ্মকোণ, এবং ক্ষুদ্রতর বৃত্তাংশস্থ কোণ স্থূলকোণ।

[The angle in a segment greater than a semi-circle is acute and that in a segment less than a semi-circle is obtuse.]

চিত্র ২২২

O, ABC বৃত্তের কেন্দ্র।
ACB বৃত্তাংশ অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা বৃহত্তর ; (১. চিত্র)
ACB বৃত্তাংশ অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। (২. চিত্র)

প্রমাণ করিতে হইবে যে (১. চিত্রে) $\angle ACB$ সূক্ষ্মকোণ,
এবং (২. চিত্রে) $\angle ACB$ স্থূলকোণ।
OA, OB যোগ কর।

প্রমাণ। ADB চাপের উপর পরিধিস্থ কোণ কেন্দ্রস্থ কোণের অর্ধেক ;
$\therefore \angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB$।
কিন্তু (১. চিত্রে), $\angle AOB <$ দুই সমকোণ; (স্থূল বা সূক্ষ্ম)
এবং (২. চিত্রে), $\angle AOB >$ দুই সমকোণ ; (প্রবৃদ্ধ)
$\therefore$ ১. চিত্রে, $\angle ACB <$ এক সমকোণ ;
এবং ২. চিত্রে, $\angle ACB >$ এক সমকোণ।
অতএব, ১. চিত্রে পরিধিস্থ কোণটি সূক্ষ্মকোণ,
এবং, ২. চিত্রে পরিধিস্থ কোণটি স্থূলকোণ।

মন্তব্য। উপচাপস্থ কোণ সূক্ষ্মকোণ হইবে (১. চিত্র), এবং অধিচাপস্থ কোন স্থূলকোণ হইবে ২. চিত্র)।

অনুশীলনী ৪৬

১। কোন বৃত্তের AB, CD দুইটি জ্যা E বিন্দুতে ছেদ করিলে AEC, DEB ত্রিভুজ-দ্বয় সদৃশকোণী হইবে।

২। কোন বৃত্তের (যাহার কেন্দ্র O) উপচাপ BCর উপর D একটি বিন্দু। CD কে E পর্য্যন্ত বর্ধিত করিলে $\angle BDE = \frac{1}{2} \angle BOC$ হইবে।

৩। কোন বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের ভুজদ্বয় AB ও DC কে বর্ধিত করিলে E বিন্দুতে ছেদ করে; প্রমাণ কর EBC, EDA ত্রিভুজ দুইটি সদৃশকোণী।

৪। AD ও BE, $\triangle ABC$র দুই ভুজের উপর লম্ব হইলে $\angle DEC = \angle ABC$হইবে।

৫। $\triangle ABC$র দুই ভুজ BC,ACর উপর লম্ব যথাক্রমে AD ও BE; প্রমাণ কর $\angle ADE = \angle ABE$।

৬। ABEC, ABFD দুইটি বৃত্ত A ও B বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। CAD ও EBF সরলরেখা হইলে EC ॥ DF হইবে।

৭। ACB ও APB দুইটি সর্বসম বৃত্ত; কিন্তু শেষোক্তটির কেন্দ্র প্রথমোক্তের পরিধির উপর অবস্থিত। বৃত্ত ACBর জ্যা CA কে বর্ধিত করিলে যদি বৃত্ত APB কে P বিন্দুতে ছেদ করে, তবে $\triangle PBC$ সমবাহু ত্রিভুজ হইবে।

৮। কোন বৃত্তের অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজের কোন একটি কোণের দ্বিখণ্ডক ও ঐ কোণের বিপরীত কোণের বহির্দ্বিখণ্ডক বৃত্তের পরিধির উপর ছেদ করে।

[The internal bisector of an angle of a cyclic quadrilateral and the external bisector of the opposite angle meet on the circum-scribed circle.]

৯। O বিন্দুর মধ্য দিয়া একটি নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধের বৃত্ত অঙ্কিত করিলে উহা OA, OB নামক দুইটি স্থির সরলরেখাকে যথাক্রমে P, R বিন্দুতে ছেদ করে। দেখাও যে PR জ্যাটির দৈর্ঘ্য স্থির থাকিবে।

১০। ABC ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহুগুলির মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E, F এবং AH, BCর উপর লম্ব। প্রমাণ কর যে EF, D ও H বিন্দুদ্বয়ে যে দুইটি সংমুখ কোণ উৎপন্ন করে তাহারা প্রত্যেকে A শীর্ষকোণের সমান।

১১। দুইটি সর্বসমবৃত্ত A ও B তে ছেদ করিয়াছে। A বিন্দুর মধ্য দিয়া যে কোন সরলরেখা পরিধিদ্বয়কে P ও Q বিন্দুদ্বয়ে ছেদ করিলে BP = BQ হইবে।

১২। OA, OB কোন বৃত্তের দুইটি লম্ব ব্যাসার্ধ; এবং AX, BY দুইটি সমান্তরাল জ্যা। প্রমাণ কর BX, AY সমকোণে নত।

১৩। দুইটি বৃত্ত A ও B বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে; Bর মধ্য দিয়া BP, BQ ব্যাসার্ধ টানা গেল। দেখাও যে P,A,Q সমরেখ (collinear)।

১৪। কোন বৃত্তের A, B দুইটি পরিধিস্থ স্থিরবিন্দু; এবং C ও D কোন নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের জ্যার প্রান্তবিন্দু। প্রমাণ কর যে AD ও BCর ছেদবিন্দু এবং AC ও BDর ছেদবিন্দু কোন নির্দিষ্ট বৃত্তদ্বয়ের পরিধিদ্বয়ে অবস্থিত।

১৫। কোন বৃত্তের যে সকল জ্যা একটি নির্দিষ্ট বিন্দুর মধ্য দিয়া গমন করে তাহাদের মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

[Find the locus of the middle points of all chords of a circle which pass through a fixed point.]

নির্দিষ্ট বিন্দুটি বৃত্তের অন্তরে, উপরে বা বাহিরে অবস্থিত ধরিয়া নির্ণেয় সঞ্চারপথের সীমা নির্দেশ কর।

১৬। ABC কোন বৃত্তের অন্তর্লিখিত একটি ত্রিভুজ। A বিন্দু হইতে এমন একটি জ্যা অঙ্কিত কর যাহা BC দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হইবে। (কখন ইহা অসম্ভব ?)।

১৭। কোন বৃত্তাংশের AB একটি ভূমি ; বৃত্তাংশটি অর্ধবৃত্ত হইতে ক্ষুদ্র ; P পরিধিস্থ একটি বিন্দু। APকে Q বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করা হইল।
যদি BQ = BP হয়, দেখাও যে Q এর সঞ্চারপথ কোন সমব্যাসার্ধ বৃত্তের চাপ।

১৮। ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের AC ও BD কর্ণদ্বয় O বিন্দুতে পরস্পর সমকোণে নত হইয়াছে।

(ক) O হইতে ABর উপর লম্ব POকে বর্ধিত করিলে যদি উহা বিপরীত বাহু DCকে Q বিন্দুতে ছেদ করে, তবে Q, DCর মধ্যবিন্দু হইবে।

(খ) বিপরীতক্রমে, DCর মধ্যবিন্দু Q এবং O সংযুক্ত করিয়া QOকে বর্ধিত করিলে উহা বিপরীত বাহু BAর উপর (P বিন্দুতে) লম্ব হইবে।

(ব্রহ্মগুপ্তের উপপাদ্য)

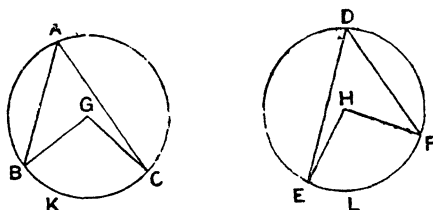
১৯। কোন চতুর্ভুজের কোণচতুষ্টয়ের অন্তর্দ্বিখণ্ডক রেখাগুলির পরস্পর ছেদনে একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ উৎপন্ন হয়। [The bisectors of the interior angles of any quadrilateral form a quadrilateral which is concyclic].

২০। প্রমাণ কর যে একটি বৃত্তস্থ ষড়ভুজের (ABCDEF) দুইটি বিপরীত কোণ (যেমন A ও D) পরস্পর সম্পূরক হইতে পারে না।

২১। ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ ; ইহার AB = AC। CDকে E পর্যন্ত বর্ধিত করিয়া দেখাও যে AD, $\angle$ BDE কোণের সমদ্বিখণ্ডক।

উপপাদ্য ৪১ (Theorem 41)

সমান সমান (কিংবা একই) বৃত্তে, যে সকল চাপ কেন্দ্রস্থলে (কিংবা পরিধিতে) সমান সমান সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করে তাহারা পরস্পর সমান। বিপরীতক্রমে, সমান সমান (কিংবা একই) বৃত্তের যে সকল সমান সমান কোণ কেন্দ্রস্থলে (কিংবা পরিধিতে] সমান চাপের উপর অবস্থিত তাহারা পরস্পর সমান।

[In equal circles (or in the same circle) arcs which subtend equal angles at the centre (or at the circumference) are equal. *Conversely,* in equal circles (or in the same circle) angles at the centres (or at the circumference) standing on equal arcs are equal. *Euc 3.* 26, 27.]

চিত্র ২২৩

ABC এবং DEF দুইটি সমান বৃত্তের কেন্দ্রদ্বয় যথাক্রমে G ও H এবং চাপদ্বয় যথাক্রমে BKC ও ELF।

কেন্দ্রস্থ ∠BGC = কেন্দ্রস্থ ∠EHF (সুতরাং, পরিধিস্থ ∠BAC = পরিধিস্থ ∠EDF)।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

BKC চাপ = ELF চাপ।

প্রমাণ। ABC বৃত্ত DEF বৃত্তের উপর এরূপভাবে স্থাপন কর যাহাতে G কেন্দ্র H কেন্দ্রের উপর পতিত হয়। বৃত্তদ্বয় সমান বলিয়া উহাদের পরিধি দুইটি সমাপতিত হইবে।

এক্ষণে, কেন্দ্র স্থির রাখিয়া, ABC বৃত্তটিকে ঘুরাইয়া উহার GB ব্যাসার্ধ HE ব্যাসার্ধের উপর স্থাপন করিলে GC ব্যাসার্ধ HE ব্যাসার্ধের উপর পতিত হইবে, কারণ, ∠BGC = ∠EHF।

∴ সমান সমান পরিধি বলিয়া BKC চাপ ELF চাপের উপর সমাপতিত হইবে, অতএব চাপ দুইটি সমান।

বিপরীতক্রমে, ABC ও DEF সমান বৃত্তে,

BKC চাপ = ELF চাপ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

কেন্দ্রস্থ ∠BGC = কেন্দ্রস্থ ∠EHF ;

কিংবা, পরিধিস্থ ∠BAC = পরিধিস্থ ∠EDF।

প্রমাণ। ABC বৃত্ত DEF বৃত্তের উপর এরূপভাবে স্থাপন কর যাহাতে G কেন্দ্র H কেন্দ্রের উপর পতিত হয়। বৃত্তদ্বয় সমান বলিয়া পরিধিদ্বয় সমাপতিত হইবে।

এক্ষণে, কেন্দ্র স্থির রাখিয়া ABC বৃত্তকে ঘুরাইয়া GB ব্যাসার্ধ HE ব্যাসার্ধের উপর পাতিত কর। B, Eর উপর পতিত হওয়ায়, C, Fএর উপর পতিত হইবে ; কারণ, চাপ BKC = চাপ ELF।

অতএব দেখা গেল যে G, B, C ও চাপ BKC যথাক্রমে H, E, F ও চাপ ELF এর উপর পতিত হওয়ায় ∠BGC = ∠EHF হইবে।

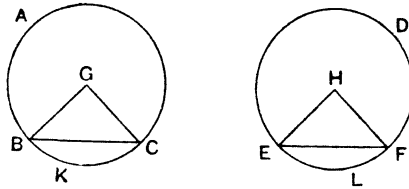
এবং ∵ $\angle BAC = \frac{1}{2}\angle BGC$, ও $\angle EDF = \frac{1}{2}\angle EHF$;

∴ ∠BAC = ∠EDF।

———

উপপাদ্য ৪২ (Theorem 42)

সমান সমান বৃত্তে (কিংবা একই বৃত্তে), সমান সমান জ্যা সমান সমান চাপ বিচ্ছিন্ন করে; বিপরীতক্রমে, সমান সমান বৃত্তে (কিংবা একই বৃত্তে) সমান সমান চাপের উপর অবস্থিত জ্যাগুলি (অধিচাপ অধিচাপের, উপচাপ উপচাপের সহিত) পরস্পর সমান।

[In equal circles, or in the same circle, equal chords cut off equal arcs—the major arc equal to the major arc and the minor to the minor. *Conversely*, in equal circles or in the same circle, the chords of equal arcs are equal. *Euc*. 3. 28, 27.]

চিত্র ২২৪

G ও H, সমান সমান বৃত্ত ABC ও DEF এর কেন্দ্রদ্বয়; ইহাদের

জ্যা BC = জ্যা EF।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

অধিচাপ BAC = অধিচাপ EDF, এবং উপচাপ BKC = উপচাপ ELF।

BG, GC, EH ও HF যোগ কর।

প্রমাণ। যেহেতু BGC, EHF ত্রিভুজদ্বয়ের

BG = EH (সমান বৃত্তের ব্যাসার্ধ)

GC = HF (সমান বৃত্তের ব্যাসার্ধ)

BC = EF (স্বীকার);

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। (উপ. ৭)

∴ ∠BGC = ∠EHF (ইহারা কেন্দ্রস্থ কোণ);

অতএব, চাপ BKC = চাপ ELF, (উপ. ৪১)

এবং এই দুইটিই উপচাপ।

পুনশ্চ ∵ বৃত্তদ্বয়ের পরিধিদ্বয় পরস্পর সমান (স্বীকার),

∴ অবশিষ্ট চাপ BAC = অবশিষ্ট চাপ EDF;

এবং এই দুইটিই অধিচাপ।

বিপরীতক্রমে, চাপ BKC = চাপ ELF।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

জ্যা BC = জ্যা EF।

প্রমাণ। যেহেতু চাপ BKC = চাপ ELF,

∴ ∠BGC = ∠EHF। (উপ. ৪১)

এক্ষণে, BGC, EHF ত্রিভুজদ্বয়ের

BG = EH (সমান বৃত্তের ব্যাসার্ধ)

GC = HF (সমান বৃত্তের ব্যাসার্ধ)

অন্তর্ভূত ∠BGC = অন্তর্ভূত ∠EHF;

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

অতএব BC = EF। (উপ. ৪)

অনুশীলনী ৪৭

১। AP, AQ কোন বৃত্তের দুইটি জ্যা, এবং চাপ AP, AQ যথাক্রমে M ও N বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত হইয়াছে। প্রমাণ কর যে, MN রেখাটি AP, AQ জ্যাদ্বয়কে যথাক্রমে B, C বিন্দুতে ছেদ করিলে AB = AC হইবে।

২। কোনও বৃত্তের ব্যাসার্ধকে ব্যাস করিয়া দ্বিতীয় বৃত্ত অঙ্কিত হইলে বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ বিন্দুটি হইতে অঙ্কিত যে কোন জ্যা শেষোক্ত বৃত্তের পরিধি দ্বারা মধ্যবিন্দুতে ছিন্ন হয়।

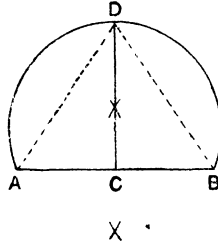
৩। কোন বৃত্তের AB, CD দুইটি সমান্তরাল জ্যা; প্রমাণ কর তাহাদের অন্তর্ভূত দুইটি চাপ পরস্পর সমান।

৪। DEF, GHK দুইটি ত্রিভুজ, যাহাদের ∠D = ∠G এবং EF = HK। প্রমাণ কর উহাদের পরিবৃত্তগুলি পরস্পর সমান।

৫। BAC বৃত্তখণ্ডস্থিত BAC যে কোন একটি কোণ। প্রমাণ কর BAC কোণের দ্বিখণ্ডক একটি নির্দিষ্ট বিন্দু অতিক্রম করিয়া যাইবে।

সম্পাদ্য ১৯ (Problem 19)

কোন একটি নির্দিষ্ট চাপকে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

[To bisect a given arc.]

চিত্র ২২৫

ADB চাপটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। AB যোগ করিয়া উহাকে DC সরলরেখা দ্বারা লম্বদ্বিখণ্ডিত কর।
(২. সম্পাদ্য)

ধর, CD রেখাটি ADB চাপকে D বিন্দুতে ছেদ করিল।

তাহা হইলে ADB চাপ, D বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইল।

DA, DB যোগ কর।

প্রমাণ। ∵ CD, ABর লম্বদ্বিখণ্ডক,

∴ CDর যে কোন বিন্দু A ও B হইতে সমদূরবর্তী ;

∴ জ্যা AD = জ্যা BD ;

অতএব চাপ AD = চাপ BD ; (উপ. ৪২)

অর্থাৎ, ADB চাপ D বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইবে।

অনুশীলনী ৪৮

১। একটি অঙ্কিত পূর্ণ বৃত্তকে সমদ্বিখণ্ডিত কর।

৮১। পরিধি-ব্যাস সম্বন্ধ নির্ণয়।

ভিন্ন ভিন্ন ব্যাসার্ধ মাপিয়া কতিপয় এককেন্দ্রীয় বৃত্ত অঙ্কন করিলে উপলব্ধি হয় যে বৃত্তের পরিধিগুলির কোন বিশেষ নির্দিষ্ট নিয়মে হ্রাসবৃদ্ধি হইতেছে। প্রকৃত-পক্ষে, যে কোন বৃত্তের পরিধি ও তাহার ব্যাসার্ধের (বা, ব্যাসের) একটি ঘনিষ্ঠ সরল সম্বন্ধ বর্তমান আছে। কাগজের উপর একটি সরলরেখা টান। একটি টাকার বা চাকৃতির যে কোন এক পার্শ্বে পরিধির কাছে একটি পেন্সিলের দাগ দিয়া

কাগজের রেখার উপর চাকৃতিটিকে এরূপভাবে খাড়া কর যাহাতে উহাকে রেখার উপর দিয়া গড়াইয়া দেওয়া চলে। দাঁড় করাইয়া চাকৃতির উক্ত পেন্সিল-চিহ্ন কাগজের রেখার উপরও মিল করিয়া একটি দাগ দাও; অতঃপর রেখার উপর চাকৃতি গড়াইয়া দিয়া পুনরায় চাকৃতির দাগ যখন কাগজের রেখার সহিত যুক্ত হইল তখন রেখাটির উপর আর একটি দাগ দাও। রেখার উপর দাগ দুইটির দূরত্ব হইতে চাকৃতির পরিধি জানা গেল। দুই তিনবার এইরূপ মাপ লইয়া তাহাদের গড় দৈর্ঘ্য (average length) হইতে অনেকটা নির্ভুল পরিধি পাওয়া যাইবে। তৎপরে, স্কেল্ দিয়া চাকৃতির ব্যাস মাপিলে দেখা যাইবে যে পরিধিকে ব্যাস দিয়া ভাগ করিলে ভাগফল অনেকটা $3\frac{1}{7}$ এই ভগ্নাংশ সংখ্যার সমান হইবে। শুদ্ধরূপে ভগ্নাংশটি জানা যায় না। সব বৃত্তের বেলায় একই নিয়ম। অতএব, বৃত্তের পরিধি ও ব্যাসের অনুপাত নির্দিষ্ট, উহাকে গ্রীক্ বর্ণ π [পাই] দ্বারা সূচিত করা হয়।

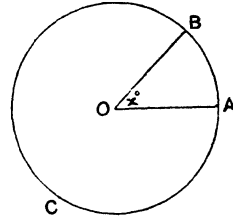
অর্থাৎ, **বৃত্তের পরিধি $= 2\pi \times$ ব্যাসার্ধ।**

সাধারণতঃ, π এর মূল্যকে $\frac{22}{7}$ ধরিলে মোটামুটি গণনা চলিতে পারে।

অনুশীলনী ৪৯।

১। ABC বৃত্তে (পার্শ্বচিত্রে)

$\frac{\text{চাপ BA}}{\text{বৃত্তের পরিধি}} = \frac{x^\circ}{360}$, হইবে কেন?

যদি চাপটি বৃত্তের অরের সমান হয় দেখাও যে স্থূলত $x = 57^\circ.16'.22''$ হইবে।

চিত্র ২২৬

২। কোন বৃত্তের চাপ যদি কেন্দ্রে 30° কোণ উৎপন্ন করে তবে চাপটি পরিধির কত অংশ?

৩। বৃত্তের চাপ যদি উহার ব্যাসার্ধের সমান হয় তবে কেন্দ্রস্থ কোণের পরিমাণ কত?

৪। কোন বৃত্তের পরিধিকে 3, 4, 5, 6, সমান অংশে বিভক্ত কর।

৫। যদি 21″ ব্যাসার্ধের একটি বৃত্তের 22″ একটি চাপ থাকে তবে সংমুখস্থ কেন্দ্র-কোণের পরিমাণ কত?

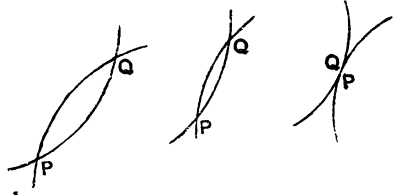
৬। কোন বাইসাইকেলের একটি চাকার ব্যাস 28″; তাহার পরিধি কত? এবং 1 মাইল গমন করিতে সাইকেলটি কতবার ঘুরিবে?

৭। কোন 100 গজ ব্যাসার্ধের বৃত্তের 30 গজের একটি জ্যা আছে। জ্যাটি কত গজ পরিমাণ চাপকে খণ্ড করিয়াছে নির্ণয় কর।

[50 গজকে 1″ ধরিয়া অঙ্কন কর। জ্যাটির দৈর্ঘ্য 1·6″ হইবে। চাপ মাপিবার পূর্বে কেন্দ্রস্থ কোণ নির্ণয় কর। কেন্দ্রস্থ কোণ $= 47^\circ{\cdot}6$ হইবে।]

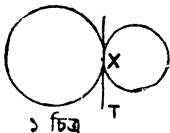
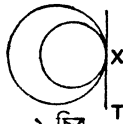
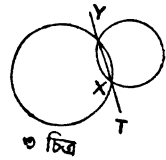
চতুর্থ অধ্যায়

স্পর্শক

৮২। দুইটি বক্রবেখা সাধাবণতঃ দুই বিন্দুতে ছেদ করে। ছেদবিন্দুদ্বয়ের ব্যবধান সবক্ষেত্রে সমান নয় (২২৭ চিত্র দেখ) ; কিন্তু বক্ররেখা দুইটি এরূপভাবে টানা যাইতে পাবে যে P, Q ছেদবিন্দু এত সন্নিকটবর্তী যে তাহাদের মধ্যস্থ বক্ররেখাব অংশগুলি দেখাই যায় না। এরূপস্থলে, বেখাগুলি মাত্র পবস্পব **স্পর্শ** (touch) কবিয়াছে বলা হয়, এবং বেখাদ্বয়ের যে কোনটিকে অপবটিব **স্পর্শরেখা** (tangent curve) বলা হয, এবং P, কিংবা Q, বিন্দুটিকে **স্পর্শবিন্দু** বলে। সচবাচব **স্পর্শক** (Tangent) বাক্যটিতে বুঝায় যে বক্রবেখাব স্পর্শক একটি সরলবেখা হইবে। যেহেতু P, ও Q বিন্দু দিযা একটি মাত্র সবলবেখা টানা যাইতে পাবে, এজন্য দুইটি বক্রবেখা পবস্পব স্পর্শ কবিলে স্পর্শবিন্দুতে একটি **সাধারণ স্পর্শক** (common tangent) থাকিবেই থাকিবে।

চিত্র ২২৭

মন্তব্য। বক্রবেখার অবিচ্ছেদ ধাবণা (idea of continuity) হইতে বলা যাইতে পারে যে উক্ত P ও Qকে যত সন্নিকটবর্তী লওয়া যাক না কেন তাহাদেব মধ্যে অন্য বিন্দু থাকিবেই থাকিবে। প্রকৃতপক্ষে, কোন অবিচ্ছেদ বক্ররেখার দুইটি ক্রমিক (consecutive) বিন্দু স্বতন্ত্র পাওয়া যায না, এবং যতক্ষণ বিন্দুদ্বযের স্বাতন্ত্র্য থাকিবে, ততক্ষণ তাহাদের সংযোজক সবলরেখাকে স্পর্শক বলা চলে না।

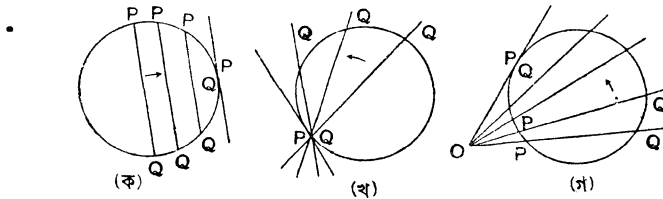
সংজ্ঞা। একটি সবলবেখা কোন বৃত্তকে ছেদ করিয়া যদি বর্ধিত হইয়াও পুনরায় তাহাকে ছেদ না করে তবে তাহাকে ঐ বৃত্তের স্পর্শক বলে।

নিম্নে দুইটি বৃত্ত ও তাহাদেব সাধারণ স্পর্শক অঙ্কিত হইল—

১ চিত্র

২ চিত্র

৩ চিত্র

চিত্র ২২৮

X বিন্দুতে বৃত্ত দুইটির ১ চিত্রে বহিঃস্পর্শ হইয়াছে ও ২. চিত্রে অন্তঃস্পর্শ হইয়াছে। উভয় চিত্রে উহাদেব একটি সাধারণ স্পর্শক আছে, (XT)। ৩. চিত্রে, X বিন্দুকে স্থির রাখিয়া ঘড়ির কাঁটা যেদিকে ঘুবে সেই দিকে ক্ষুদ্রতর

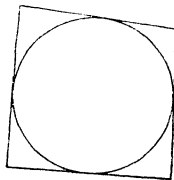
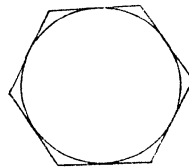
বৃত্তটিকে ঘুরাইলে ছেদবিন্দু Y-টি ক্রমশঃ X বিন্দুর নিকটবর্তী হইতে থাকিবে এবং ছেদকটি ক্রমশঃ ঘুরিয়া এরূপ অবস্থায় আসিবে যে Y, X এর সংমুখবর্তী হইয়া উহার সহিত লীন হইয়া যাইবে। ছেদকটি এই চরম অবস্থায় ১, চিত্রের XT স্পর্শকে পরিণত হইবে। ছেদকটি ঘড়ির কাঁটা যেদিকে ঘুরে তাহার বিপরীত দিকে ঘুরিলে চরমে ২, চিত্রটি পাওয়া যাইবে।

নিম্নচিত্রগুলিতে ছেদকের চরম অবস্থায় কি প্রকারে উহা স্পর্শকে পরিণত হয় তাহা অঙ্কন সাহায্যে দেখান হইয়াছে।

চিত্র ২২৯

(ক) PQ ছেদকটি সমান্তরালভাবে চলিয়া স্পর্শক হইয়াছে।

(খ) PQ ছেদকটি বৃত্তস্থ P বিন্দুতে স্থির থাকিয়া তীর-নির্দিষ্ট দিকে ঘুরিয়া স্পর্শক হইয়াছে।

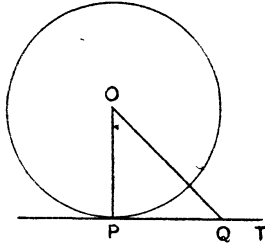
(গ) PQ ছেদকটি বহিঃস্থ O বিন্দুতে স্থির থাকিয়া তীর-নির্দিষ্ট দিকে ঘুরিয়া স্পর্শক হইয়াছে।

৮৩। **সংজ্ঞা**। কোন ঋজুক্ষেত্রের ভুজগুলি কোন বৃত্তকে স্পর্শ করিলে ক্ষেত্রটি বৃত্তের **পরিলিখিত** (circumscribed) কিংবা **অন্তর্লিখিত** (inscribed) হইতে পারে। ক্ষেত্রটি পরিলিখিত হইলে বৃত্তটিকে ক্ষেত্রের অন্তর্বৃত্ত বলে।

পরিলিখিত চতুর্ভুজ ও অন্তর্লিখিত বৃত্ত

পরিলিখিত ষড়ভুজ ও অন্তর্লিখিত বৃত্ত

চিত্র ২৩০

উপপাদ্য ৪৩ (Theorem 43)

বৃত্তের যে কোন স্পর্শক স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধের উপর লম্ব হইবে।

[The tangent at any point of a circle is perpendicular to the radius through that point. *Euc.* 3.18.]

চিত্র ২৩১

O বৃত্তের কেন্দ্র; P বিন্দুতে PT স্পর্শক, এবং OP ব্যাসার্ধ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, OP, PTর উপর লম্ব।

PTর উপর অপর কোন বিন্দু Q লও; OQ যোগ কর।

প্রমাণ। ∵ PT সরলরেখার P ব্যতীত সব বিন্দুই বৃত্তের বহিঃস্থ,

∴ Q, পরিধির বহিঃস্থ।

∴ OQ > বৃত্তের ব্যাসার্ধ OP ;

এবং Q বিন্দুর যে কোন অবস্থানেই ইহা সত্য ;

অর্থাৎ, O বিন্দু হইতে PTর উপর যাবতীয় সরলরেখা, OP হইতে বৃহত্তর হওয়ায়, OP, O হইতে PTর ক্ষুদ্রতম দূরত্ব ;

∴ OP, PT স্পর্শকের উপর লম্ব। (উপ. ১২)

অনু. ১। বৃত্তের পরিধিস্থ যে কোন বিন্দুতে মাত্র একটি স্পর্শকই অঙ্কিত করা যায়।

অনু. ২। স্পর্শবিন্দুতে স্পর্শকের উপর লম্ব বৃত্তের কেন্দ্রগামী।

অনুশীলনী ৫০

১। বৃত্তস্থিত কোন বিন্দুতে একটি স্পর্শক অঙ্কিত কর।

২। কোন নির্দিষ্ট সরলরেখার সহিত সমান্তরাল করিয়া কোন বৃত্তের একটি স্পর্শক অঙ্কিত কর। এইরূপ কয়টি স্পর্শক অঙ্কন সম্ভব ?

৩। কোন নির্দিষ্ট সরল রেখার সহিত নির্দিষ্ট পরিমাণ কোণ করিয়া একটি স্পর্শক অঙ্কিত কর।

৪। কোন বৃত্তের অন্তঃস্থ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে কিরূপে দুইটি সমান জ্যা অঙ্কন করা যাইবে, যাহাতে জ্যা দুইটির অন্তর্ভুর্ত কোণটি সমকোণ হইবে ?

৫। কোন বৃত্তের এমন দুইটি স্পর্শক অঙ্কিত কর যে তাহাদের অন্তর্ভুর্ত কোণ একটি নির্দিষ্ট কোণের সহিত সমান হইবে।

৬। একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে কোন বৃত্তের একটি স্পর্শক অঙ্কিত কর, এইরূপ কতটি স্পর্শক টানা যাইতে পারে ?

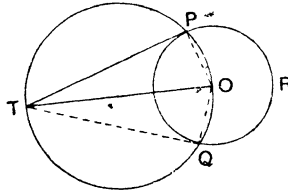
৭। কোন বৃত্তের বহিঃস্থ একটি বিন্দু হইতে এমন একটি ছেদক অঙ্কিত কর যে বৃত্তটি উক্ত ছেদক হইতে নিদিষ্ট পরিমাণ জ্যা কর্তন করিবে ?

৮। কোন বৃত্তের বহিঃস্থ একটি বিন্দু হইতে এমন একটি ছেদক অঙ্কিত কর যাহা পরিধির এক চতুর্থাংশ কাটিয়া যাইবে ?

৯। কোন বৃত্তে একটি জ্যার এক প্রান্তবিন্দুতে বৃত্তের একটি স্পর্শক অঙ্কিত হইল। প্রমাণ কর যে উক্ত জ্যা ও স্পর্শকটির অন্তর্ভুর্ত কোণ জ্যাটির সম্মুখস্থ কেন্দ্রস্থ অর্ধেক হইবে।

সম্পাদ্য ২০ (Problem 20)

বহিঃস্থ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে বৃত্তের দুইটি স্পর্শক অঙ্কিত করা যায়।

[Two tangents can be drawn to a circle from a given external point.]

চিত্র ২৩২

O, PQR বৃত্তের কেন্দ্র ; T বহিঃস্থ কোন নির্দিষ্ট বিন্দু।
T বিন্দু হইতে বৃত্তের দুইটি স্পর্শক অঙ্কিত করা যাইবে।

অঙ্কন। TO যোগ কর। TOকে ব্যাস ধরিয়া ⊙TPQ অঙ্কিত কর ; ধর, ইহা নির্দিষ্ট ⊙PQRকে P ও Q দুই বিন্দুতে ছেদ করে।

TP, TQ যোগ কর। তাহা হইলে, TP ও TQ বৃত্তের স্পর্শকদ্বয় হইবে।

প্রমাণ। OP, OQ যোগ কর।

∴ TPO, TQO দুইটি অর্ধবৃত্তস্থ কোণ,

∴ ∠TPO = ∠TQO = এক সমকোণ ; (উপ. ৩৯)

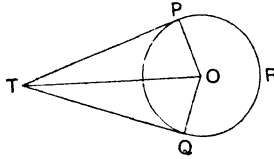
সুতরাং, TP, TQ যথাক্রমে OP, OQ ব্যাসার্ধদ্বয়ের উপর লম্ব,

∴ TP, P বিন্দুতে এবং TQ, Q বিন্দুতে বৃত্তকে স্পর্শ করিবে। (উপ. ৪৩)

অতএব, T বিন্দু হইতে TP, TQ দুইটি স্পর্শক অঙ্কন করা যাইবে।

উপপাদ্য ৪৪ (Theorem 44)

কোন নির্দিষ্ট বহিঃস্থ বিন্দু হইতে কোন বৃত্তে দুইটি স্পর্শক টানিলে [ক] উহারা পরস্পর সমান হইবে, [খ] বৃত্তের কেন্দ্রস্থলে উহাদের সংমুখ কোণদ্বয় পরস্পর সমান হইবে।

[Two tangents drawn to a circle from an external point are equal, and subtend equal angles at the centre.]

চিত্র ২৩৩

O, PQR বৃত্তের কেন্দ্র ; কোন নির্দিষ্ট বহির্বিন্দু T হইতে TP, TQ স্পর্শকদ্বয় টানা হইয়াছে। OP, OQ OT যোগ কর।

প্রমাণ করিতে হইবে

(ক) TP = TQ ;

(খ) ∠TOP = ∠TOQ।

প্রমাণ। যেহেতু, OP, OQ স্পর্শবিন্দুগামী দুইটি ব্যসার্ধ এবং TP, TQ বৃত্তের স্পর্শকদ্বয়,

∴ ∠TPO = ∠TQO = এক সমকোণ। (উপ. ৪৩)

এক্ষণে, TPO, TQO সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের

TO অতিভুজ সাধারণ বাহু,

এবং OP = OQ ;

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। (উপ. ১৮)

অতএব, TP = TQ এবং ∠TOP = ∠TOQ।

অনু. ১। TO স্পর্শকদ্বয়ের অন্তর্ভূর্ত কোণকে দ্বিখণ্ডিত করে।

অনু. ২। TO সরলরেখা চিত্রটির প্রতিসাম্যাক্ষ।

অনু. ৩। PQ জ্যার লম্বদ্বিখণ্ডক হইল TO।

সংজ্ঞা। PQজ্যাটিকে **স্পর্শজ্যা** (Chord of contact) বলে।

অনুশীলনী ৫১

১। কোন 6 সেঃ মিঃ ব্যাসার্ধের বৃত্তের কেন্দ্র হইতে 10 সেঃ মিঃ দূরবর্তী একটি বিন্দু আছে; বিন্দু হইতে বৃত্তের একটি স্পর্শক টানিলে তাহার দৈর্ঘ্য কত হইবে?

২। O কোন বৃত্তের কেন্দ্র, উহার ব্যাসার্ধ r; P বিন্দু হইতে উহার স্পর্শকের দৈর্ঘ্য l; OPর দৈর্ঘ্য কত?

৩। কোন বৃত্তে এরূপ দুইটি স্পর্শক টান যাহারা 60°তে পরস্পর নত হইবে।

৪। 4·5 সেঃ মিঃ ব্যাসার্ধের কোন বৃত্তে দুইটি স্পর্শক টান যাহাদের অন্তর্ভূর্ত কোণ 45° হইবে।

৫। 9″ ও 15″ দীর্ঘ ব্যাসার্ধের দুইটি এককেন্দ্রীয় বৃত্ত আছে; বৃহত্তর বৃত্তটির কোন জ্যা ক্ষুদ্রতরটির স্পর্শক হইলে জ্যাটির দৈর্ঘ্য কত?

৬। কোন বৃত্তের (কিংবা চাপের) কেন্দ্র না জানিয়া কিরূপে একটি স্পর্শক টানা যাইতে পারে?

[দুই, তিনটি সমান্তরাল জ্যার মধ্যবিন্দু সংযোজক রেখা, পরিধিকে যে বিন্দুতে ছেদ করিবে তাহার মধ্যগামী সমান্তরাল রেখাই স্পর্শক।]

৭। কোন দুইটি নির্দিষ্ট এককেন্দ্রীয় বৃত্তের বহির্বৃত্তের যে কোন বিন্দু হইতে অন্তর্বৃত্তের স্পর্শকের দৈর্ঘ্য সমান।

৮। O কোন বৃত্তের কেন্দ্র; PA, PB দুইটি স্পর্শক এবং AB স্পর্শ-জ্যা। প্রমাণ কর P, B, O, A বৃত্তস্থ বিন্দু (Concyclic)। যদি স্পর্শক দুইটি স্পর্শ-জ্যার সমান হয় তবে ∠AOB কত ডিগ্রি?

৯। ABCD কোন বৃত্তের পরিলিখিত চতুর্ভুজ হইলে উহার চারিটি বাহু বৃত্তটির স্পর্শক। P, Q, R, S স্পর্শবিন্দুগুলি যোগ করিয়া চতুর্ভুজ PQRS অন্তর্লিখিত হইল। (পার্শ্বচিত্র দেখ)।

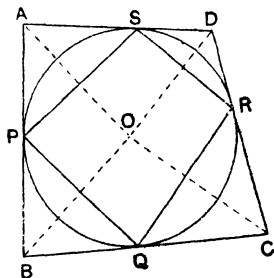
চিত্র ২৩৪

প্রমাণ কর

(ক) AB+CD=BC+AD

(খ) ∠APS+∠BPQ=∠QRS;

(গ) ∠ASP=∠APS;

(ঘ) ∠AOB+∠COD=দুই সমকোণ (বৃত্তের কেন্দ্র O)

১০। কোন বৃত্তের দুইটি সমান্তরাল স্পর্শককে অপর একটি স্পর্শক A ও B বিন্দুতে ছেদ করিলে AB রেখা কেন্দ্রে যে সংমুখ কোণ উৎপন্ন করে তাহা এক সমকোণ।

১১। বৃত্তের পরিলিখিত সামান্তরিক একটি রম্বস্।

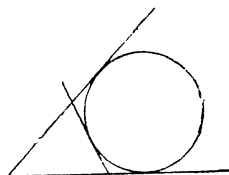
১২। বৃত্তের পরিলিখিত আয়তক্ষেত্র একটি বর্গক্ষেত্র।

১৩। বৃত্তের পরিলিখিত ABCDEF একটি ষড়্ভুজ। প্রমাণ কর যে, $AB+CD+EF=BC+DE+FA$।

১৪। কোন সরলরেখা একটি বৃত্তকে P, Q বিন্দুতে ছেদ করিয়া অপর একটি বৃত্তকে R, S বিন্দুতে ছেদ করে; যদি P ও R বিন্দুদ্বয়ে দুই স্পর্শক পরস্পর সমান্তরাল হয়, তবে Q ও S বিন্দুদ্বয়ে স্পর্শকদ্বয়ও পরস্পর সমান্তরাল হইবে।

১৫। AC কোন বৃত্তের ব্যাস, AB একটি জ্যা. A ও B বিন্দুতে দুইটি স্পর্শক D বিন্দুতে ছেদ করিলে $\angle ADB = 2\angle BAC$ হইবে।

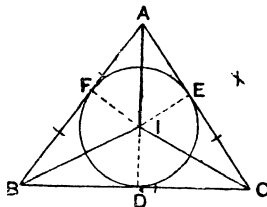
৮৩ ক। ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্ত ও বহির্বৃত্ত

যে বৃত্ত ত্রিভুজের বাহুত্রয়কে স্পর্শ করে তাহাকে ত্রিভুজের **অন্তর্বৃত্ত** (Inscribed circle) বলে, এবং যে বৃত্ত ত্রিভুজের একটি বাহু ও অপর বাহুদ্বয়ের বর্ধিত অংশগুলিকে স্পর্শ করে তাহাকে **বহির্বৃত্ত** (Escribed circle) বলে। অন্তর্বৃত্তের কেন্দ্রকে **অন্তঃকেন্দ্র** (In-centre) ও বহি-র্বৃত্তের কেন্দ্রকে **বহিঃকেন্দ্র** (Ex-centre) বলে।

চিত্র ২৩৫

মন্তব্য। উক্ত সংজ্ঞা ও চিত্র হইতে বুঝা যায় যে কোন ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্ত একটি, এবং বহির্বৃত্ত তিনটি হইবে।

সম্পাদ্য ২১ (Problem 21)

একটি ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To draw the inscribed circle of a given triangle.]

চিত্র ২৩৬

ABC ত্রিভুজটির অন্তর্বৃত্ত অঙ্কন করিতে হইবে।

অঙ্কন। ∠ABC ও ∠ACBর যথাক্রমে BI ও CI সমদ্বিখণ্ডক টান; মনে কর, ইহারা I বিন্দুতে ছেদ করে। I নির্ণেয় বৃত্তের কেন্দ্র হইবে। I হইতে BCর উপর ID লম্ব টান। I বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া, ID ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্তটিই নির্ণেয় বৃত্ত হইবে।

প্রমাণ। I হইতে ID, IE, IF যথাক্রমে BC, CA, ABর উপর লম্ব টান।

∵ BI, ∠ABCর দ্বিখণ্ডক

∵ BI রেখার যে কোন বিন্দু BC ও BA হইতে সমদূরবর্তী,

∴ ID = IF ; (উপপাদ্য ২৩)

সেইরূপ, CI রেখার যে কোন বিন্দু CB ও CA হইতে সমদূরবর্তী,

∴ ID = IE ;

∴ ID = IE = IF ।

অতএব, I বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া ID ব্যাসার্ধ লইয়া যে বৃত্ত অঙ্কন করা যাইবে তাহা E ও F বিন্দুর মধ্য দিয়া যাইবে। পুনশ্চ, ID, IE, IF, বাহু তিনটির উপর লম্ব হওয়ায় BC, CA, AB ঐ বৃত্তের স্পর্শক হইবে, এবং D, E, F, এই তিনটি স্পর্শবিন্দু হইবে।

সুতরাং, অঙ্কিত বৃত্ত DEF, ABC ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্ত।

অনু. ১। AF = AE, BF = BD, CD = CE ; অতএব যদি $2s = a+b+c$ হয়, তবে AF = AE = $s-a$, BF = BD = $s-b$ এবং CE = CD = $s-c$ হইবে।

অনু. ২। $\triangle ABC = \triangle IBC + \triangle ICA + \triangle IAB$

$= \frac{1}{2}r.\ BC + \frac{1}{2}r.\ CA + \frac{1}{2}r.\ AB$ (r = অন্তর্বৃত্তের অর)

$= \frac{1}{2}r\ (BC + CA + AB) = \frac{1}{2}r.\ (a+b+c) = r.s$

$\therefore\ r = \dfrac{\triangle ABC}{s} = \dfrac{\text{ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল}}{\text{অর্ধ-পরিসীমা}}$

অনু. ৩। A, B, C কে কেন্দ্র করিয়া যথাক্রমে AF, BD ও CE ব্যাসার্ধ লইয়া তিনটি বৃত্ত অঙ্কিত করিলে উহারা পরস্পর বহির্দেশে স্পর্শ করিবে।

প্রশ্ন। এক রেখায় অবস্থিত নয় এমন যে কোন তিনটি বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া তিনটি বৃত্ত অঙ্কিত কর যাহাদের বহিঃস্পর্শ হইবে।

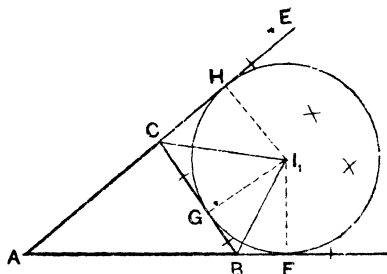
অনু. ৪। অন্তঃকেন্দ্র I কে কেন্দ্র করিয়া অঙ্কিত বৃত্ত ত্রিভুজের বাহু হইতে সমদীর্ঘ তিনটি জ্যা কর্তন করিবে।

প্রশ্ন। এমন একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর যাহা একটি ত্রিভুজের বাহুত্রয় হইতে সমদীর্ঘ জ্যা কর্তন করিবে।

অনু. ৫। $\angle BIC = 90^\circ + \frac{1}{2}A$, $\angle CIA = 90^\circ + \frac{1}{2}B$, এবং $\angle AIB = 90^\circ + \frac{1}{2}C$ ।

সম্পাদ্য ২২ (Problem 22)

কোন ত্রিভুজের একটি বহির্বৃত্ত অঙ্কন করিতে হইবে।

[To draw an escribed circle of a given triangle]

চিত্র ২৩৭

ABC ত্রিভুজটির বহির্বৃত্ত অঙ্কন করিতে হইবে।

AB, AC বাহুদ্বয়কে যথাক্রমে D, E বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত কর। BC, CE BDকে স্পর্শ করিবে এইরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কন করিতে হইবে।

অঙ্কন। ∠CBD ও ∠BCEর যথাক্রমে BI ও CI_1 সমদ্বিখণ্ডক-রেখাদ্বয় টান ; ধর, উহাদের ছেদবিন্দু I_1।

I_1 উদ্দিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র হইবে।

I_1 হইতে BCর উপর I_1G লম্ব টান। I_1 কে কেন্দ্র করিয়া I_1G ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্তই নির্ণেয় বৃত্ত হইবে।

প্রমাণ। I_1 হইতে I_1G, I_1H ও I_1F যথাক্রমে BC, CE ও BDর উপর লম্ব টান। যেহেতু BI_1 রেখা ∠DBCর সমদ্বিখণ্ডক, অতএব,

BI_1 রেখার যে কোন বিন্দু BC, BD হইতে সমদূরবর্তী ;

$\therefore \; I_1G = I_1F$; (উপ. ২৩)

সেইরূপ, CI_1 রেখার যে কোন বিন্দু BC, CE হইতে সমদূরবর্তী ;

$\therefore \; I_1G = I_1H$;

$\therefore \; I_1F = I_1G = I_1H$

অতএব, I_1 বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া I_1G ব্যাসার্ধ লইয়া যে বৃত্ত অঙ্কন করা যাইবে তাহা F ও H বিন্দুদ্বয়ের মধ্য দিয়া যাইবে ; পুনশ্চ, I_1F, I_1G, I_1H বাহুগুলির উপর লম্ব হওয়ায় BD, BC, CE বৃত্তটির স্পর্শক হইবে।

∴ FGH বৃত্ত ABC ত্রিভুজের একটি বহির্বৃত্ত।

অনু ১। AI_1, $\angle BAC$কে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে।

অনু ২। $\angle A$র অন্তর্দ্বিখণ্ডক এবং $\angle B$ ও $\angle C$র বহির্দ্বিখণ্ডকদ্বয় I_1 বিন্দুতে মিলিত হয়। I_1 ত্রিভুজটির একটি বহিঃকেন্দ্র (ex-centre) ; প্রত্যেক ত্রিভুজের তিনটি বহিঃকেন্দ্র আছে। বহির্বৃত্তগুলির ব্যাসার্ধ যথাক্রমে r_1, r_2, r_3 দ্বারা সূচিত হয়।

অনু ৩। ২২. সম্পাদ্য চিত্রে AI_1 যোগ কর।

$$\triangle ABC = \triangle I_1AB + \triangle I_1AC - \triangle I_1BC$$
$$= \tfrac{1}{2}cr_1 + \tfrac{1}{2}br_1 - \tfrac{1}{2}ar_1$$
$$= \tfrac{1}{2}r_1(b+c-a) = \tfrac{1}{2}r_1(2s-2a) = \tfrac{1}{2}r_1(s-a)$$

$$\therefore\ r_1 = \frac{\triangle}{s-a},\ \text{অনুরূপে}\ r_2 = \frac{\triangle}{s-b},\ r_3 = \frac{\triangle}{s-c}$$

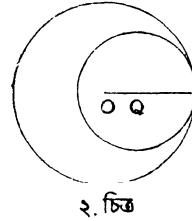
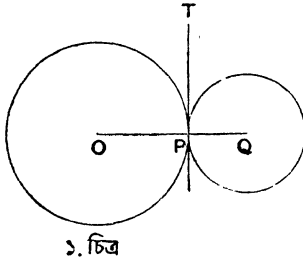
অনু ৪। I_1 কে কেন্দ্র করিয়া অঙ্কিত বৃত্ত ত্রিভুজের বাহুত্রয় হইতে সমদীর্ঘ তিনটি জ্যা কর্তন করিবে।

অনু ৫। A কে কেন্দ্র করিয়া AF ব্যাসার্ধ লইয়া, B কে কেন্দ্র করিয়া BF ব্যাসার্ধ লইয়া এবং C কে কেন্দ্র করিয়া CH ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত তিনটি বৃত্তের শেষোক্ত দুইটির বহিঃস্পর্শ ঘটিবে এবং প্রথমটির সহিত ইহাদের অন্তঃস্পর্শ ঘটিবে।

দ্রষ্টব্য। সম্পাদ্য ২১ এর অনুসিদ্ধান্তগুলির সহিত এই অনুসিদ্ধান্তগুলি তুলনা করিলে উভয়ের সাদৃশ্য পরিলক্ষিত হয়।

উপপাদ্য ৪৫ (Theorem 45)

দুইটি বৃত্ত পরস্পর স্পর্শ করিলে উহাদের কেন্দ্রদ্বয় ও স্পর্শবিন্দু একই সরলরেখায় অবস্থিত হয়।

[If two circles touch, the point of contact and their centres lie on a straight line. *Euc. 3.* 11, 12]

চিত্র ২৩৮

O, Q দুইটি বৃত্তের কেন্দ্র ; উহারা P বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে (১. চিত্রে বহিঃস্পর্শ, ও ২, চিত্রে অন্তঃস্পর্শ)।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, O, P, Q তিনটি বিন্দু একই সরল রেখায় অবস্থিত।

OP, QP যোগ কর।

প্রমাণ। ∵ P বিন্দুতে বৃত্ত দুইটি স্পর্শ করিয়াছে,

∴ P বিন্দুতে তাহাদের সাধারণ স্পর্শক আছে।

মনে কর, PT সাধারণ স্পর্শক।

∵ OP, QP দুইটি স্পর্শবিন্দুগত ব্যাসার্ধ,

∴ OP, TP র উপর লম্ব ;

এবং PQ, TP র উপর লম্ব (উপ. ৪৩)

অর্থাৎ, OPT ও TPQ কোণ দুইটির সমষ্টি দুই সমকোণ। (উপ. ২)

অতএব OP, QP একই সরলরেখায় অবস্থিত ;

অর্থাৎ, O, P, Q বিন্দুত্রয় এক সরলরেখায় অবস্থিত।

অনু. ১। তুই বৃত্তের বহিঃস্পর্শ হইলে কেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব ব্যাসার্ধদ্বয়ের সমষ্টির সমান।

অনু. ২। তুই বৃত্তের অন্তঃস্পর্শ হইলে কেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব ব্যাসার্ধদ্বয়ের অন্তরের সমান।

দ্রষ্টব্য। যে সকল বৃত্ত (O) কে P বিন্দুতে স্পর্শ করিবে তাহাদের কেন্দ্র বিন্দুসমূহ OP সরলরেখায় অবস্থিত থাকিবে।

অনুশীলনী ৫২

১। কোন নির্দিষ্ট বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কন কর যাহা অপর নির্দিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শ করিবে। এইরূপ কয়টি বৃত্ত অঙ্কন করা যাইবে ?

২। r ব্যাসার্ধের একটি বৃত্ত, R ব্যাসার্ধের একটি বৃত্তের (ক) ভিতরে (খ) বাহিরে, গড়াইয়া যায়। উভয় স্থলে, গড়ান বৃত্তটির কেন্দ্রের সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

৩। তিনটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ যথাক্রমে a, b ও c; তাহারা পরস্পর বহিঃস্পর্শ করিয়াছে। তাহাদের কেন্দ্রসংযোজক ত্রিভুজটির বাহুগুলির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর; এবং ইহা অবলম্বন করিয়া $1''$, $2''$ ও $3''$ ব্যাসার্ধের তিনটি বৃত্ত অঙ্কন কর যাহারা পরস্পর বহিঃস্পর্শ করিবে।

৪। কোন নির্দিষ্ট বৃত্তের পরিধিস্থ নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করিবে এরূপ যত বৃত্ত অঙ্কিত করা যায় তাহাদের কেন্দ্রগুলির সঞ্চারপথ কি ?

৫। তুইটি বৃত্ত স্পর্শ করিলে তাহাদের সমান্তরাল ব্যাসগুলির প্রান্তবিন্দু ও স্পর্শবিন্দু একরেখায় থাকিবে।

৬। চারিটি পরস্পর অসমান ব্যাসার্ধের বৃত্তাকৃতি মুদ্রা টেবিলের উপর আছে; যে কোন একটি অপর তুইটিকে স্পর্শ করিলে কেন্দ্রসংযোজক রেখাদ্বারা যে চতুর্ভুজ উৎপন্ন হইবে, তাহার মধ্যে একটি বৃত্ত অন্তর্লিখিত হওয়া সম্ভবপর, প্রমাণ কর।

৭। তুইটি বৃত্ত A বিন্দুতে বহিঃস্পর্শ করিয়াছে। একটি সরলরেখা উভয় বৃত্তকে B ও C বিন্দুতে স্পর্শ করিলে প্রমাণ কর $\angle ABC$ = এক সমকোণ হইবে।

৮। তুইটি বৃত্ত X বিন্দুতে অন্তঃস্পর্শ করিয়াছে, এবং একটি রেখা বামদিক হইতে দক্ষিণদিকে টানিলে উহাদের যথাক্রমে A, B, C, D বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, AB ও CD X বিন্দুতে পরস্পর সমান সংমুখকোণ উৎপন্ন করে।

৯। দুইটি বৃত্ত X বিন্দুতে বহিঃস্পর্শ করিয়াছে, এবং একটি রেখা বাম দিক হইতে দক্ষিণ দিকে টানিলে উহাদের যথাক্রমে A, B, C, D বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, AD ও BC, X বিন্দুতে পরস্পর সম্পূরক সংমুখকোণ উৎপন্ন করে।

১০। $\triangle ABC$ অঙ্কন কর, যাহার $AB = 1'' = BC$, $\angle ABC = 120^\circ$।

A কে কেন্দ্র করিয়া AB ব্যাসার্ধ লইয়া বৃত্ত অঙ্কিত কর। অতঃপর, ঐ বৃত্তকে B বিন্দুতে স্পর্শ করিবে ও C বিন্দুগামী হইবে এরূপ অপর বৃত্তটি অঙ্কিত কর।

১১। দুইটি বৃত্তের স্পর্শবিন্দুর ভিতর দিয়া একটি সরল রেখা টানিলে ইহা যদি বৃত্তদ্বয়কে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে তবে XP ও YQ সমান্তরাল হইবে; (X ও Y বৃত্তদ্বয়ের কেন্দ্র)।

১২। পরস্পর অন্তঃস্পর্শ ঘটিয়াছে এমন দুইটি বৃত্তের কেন্দ্র A ও B। ইহাদের বৃহত্তর বৃত্তের সহিত অন্তঃস্পর্শ ও ক্ষুদ্রতর বৃত্তের সহিত বহিঃস্পর্শ ঘটিয়াছে এমন আর যে কোন একটি বৃত্তের কেন্দ্র O। প্রমাণ কর AO + BO = ধ্রুবক।

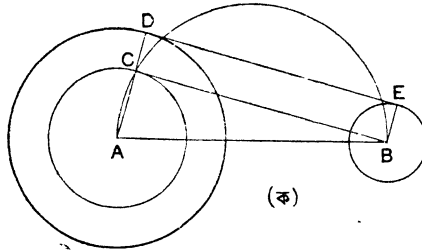
১৩। AB সরলরেখার মধ্যবিন্দু C। AB, AC ও BCকে ব্যাস ধরিয়া একই দিকে তিনটি অর্ধবৃত্ত অঙ্কিত কর। প্রমাণ কর, যে বৃত্ত এই তিনটি অর্ধবৃত্তকে স্পর্শ করিবে তাহার ব্যাসার্ধ $\frac{1}{6}AB$ হইবে।

৮৩ (খ)। সরল ও তির্যক সাধারণ স্পর্শক :—

যদি দুইটি বৃত্তের কোন সাধারণ স্পর্শকের স্পর্শবিন্দুদুইটি কেন্দ্রসংযোজক সরলরেখার একই পার্শ্বে অবস্থিত হয়, তবে উহাকে বৃত্তদ্বয়ের **সরল সাধারণ স্পর্শক** (Direct Common Tangent) বলে; এবং স্পর্শ বিন্দু দুইটি যদি ঐ সরল রেখার বিপরীত পার্শ্বে থাকে তবে স্পর্শকটিকে **তির্যক সাধারণ স্পর্শক** (Transverse Common Tangent) বলে। সম্পাদ্য ২৩ এ উভয় প্রকার স্পর্শকের অঙ্কনপ্রণালী প্রদর্শিত হইতেছে।

সম্পাদ্য ২৩ (Problem 23)

দুইটি বৃত্তের একটি সাধারণ স্পর্শক অঙ্কন করিতে হইবে।

[To draw a common tangent to two circles.]

চিত্র ২৩৯

A ও B যথাক্রমে বৃহত্তর ও ক্ষুদ্রতর বৃত্তের কেন্দ্রদ্বয়, এবং R ও r যথাক্রমে উহাদের ব্যাসার্ধ। এই বৃত্ত দুইটির একটি সাধারণ স্পর্শক অঙ্কিত করিতে হইবে।

(ক) অঙ্কন। AB যোগ কর। A কে কেন্দ্র করিয়া এবং বৃত্ত দুইটির ব্যাসার্ধের অন্তরফল ($R-r$) পরিমাণ ব্যাসার্ধ লইয়া অপর একটি বৃত্ত অঙ্কন কর, এবং B হইতে এই শেষোক্ত বৃত্তে স্পর্শক BC অঙ্কিত কর। (২০, সম্পাদ্য)

AC যোগ করিয়া ইহাকে বর্ধিত করিয়া বৃহত্তর বৃত্তকে D বিন্দুতে ছেদ কর।

কেন্দ্র B হইতে BE ব্যাসার্ধ, AD র সমান্তরাল করিয়া (একদিকেই) টান।

DE যোগ কর।

তাহা হইলে, DE বৃত্তদ্বয়ের একটি সরল সাধারণ স্পর্শক হইবে।

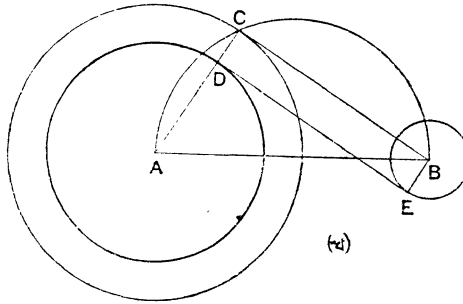
প্রমাণ। $\because$ $AD = R$ এবং $AC = R - r$;

$\therefore$ $CD = r = BE$; এবং $CD \parallel BE$ ।

অতএব CDEB একটি সামান্তরিক এবং $\angle DCB = \angle ACB =$ এক সমকোণ হওয়ায় CDEB একটি আয়তক্ষেত্র।

$\therefore$ $\angle ADE = \angle BED =$ এক সমকোণ ;

অর্থাৎ, DE উভয় বৃত্তের সাধারণ স্পর্শক।

(**খ**) **অঙ্কন**। AB যোগ কর। A কে কেন্দ্র করিয়া এবং বৃত্ত দুইটির ব্যাসার্ধের সমষ্টিফল (R + r) পরিমাণকে ব্যাসার্ধ লইয়া অপর একটি বৃত্ত অঙ্কন কর; এবং এই বৃত্তে B হইতে BC স্পর্শক টান।

চিত্র ২৪০

AC যোগ করিলে ইহা বৃহত্তর বৃত্তকে D বিন্দুতে ছেদ করিবে।

কেন্দ্র B হইতে BE ব্যাসার্ধ AD র সমান্তরাল করিয়া বিপরীত দিকে টান। DE যোগ কর।

তাহা হইলে, DE বৃত্তদ্বয়ের একটি তির্যক সাধারণ স্পর্শক হইল।

প্রমাণ। ∵ AD = R এবং AC = R + r;

∴ CD = r = BE ; এবং CD ∥ BE।

অতএব CDEB একটি সামান্তরিক এবং ∠DCB এক সমকোণ হওয়ায় CDEB একটি আয়তক্ষেত্র।

∴ ∠ADE = ∠BED = এক সমকোণ ;

অর্থাৎ, DE উভয় বৃত্তের সাধারণ স্পর্শক।

দ্রষ্টব্য। চিত্র ২৩৯ এ DE সাধারণ স্পর্শকের স্পর্শবিন্দুদ্বয় D ও E কেন্দ্র সংযোজক সরলরেখার ABর একই পার্শ্বে অবস্থিত ; এস্থলে DE বৃত্তদ্বয়ের সরল সাধারণ স্পর্শক। ABর অপর পার্শ্বে DEর অনুরূপ আরও একটি সরল সাধারণ স্পর্শক অঙ্কিত হইতে পারে। আবার চিত্র. ২৪০এ সাধারণ স্পর্শক DEর স্পর্শ বিন্দুদ্বয় ABর বিপরীতদিকে অবস্থিত ; এজন্য DE একটি তির্যক সাধারণ স্পর্শক DEর অনুরূপ আরও একটি তির্যক সাধারণ স্পর্শক আছে। সুতরাং দুইটি বৃত্তের মোট **চারিটি** সাধারণ স্পর্শক আছে ; বৃত্তদ্বয়ের অবস্থান ভেদে এই চারিটি

স্পর্শক তিনটি, দুইটি ও একটি স্পর্শকে পরিণত হইয়া থাকে। যখন বৃত্ত দুইটির একটি অপরটির ভিতরে অবস্থিত, তখন সাধারণ স্পর্শক বিলুপ্ত হয়।

অনুশীলনী ৫৩

১। নিম্নলিখিত প্রত্যেক স্থলে কতগুলি সাধারণ স্পর্শক অঙ্কিত করা যাইতে পারে?

(ক) যদি দুইটি বৃত্ত বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করে; (খ) যদি দুইটি বৃত্ত অন্তঃস্থভাবে স্পর্শ করে; (গ) যদি দুইটি বৃত্ত পরস্পর ছেদ করে।

২। দুইটি সমব্যাসার্ধ বৃত্তের সাধারণ স্পর্শক অঙ্কিত কর।

৩। দুইটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ যথাক্রমে 1 ও 3 সে. মি.; এবং কেন্দ্রদ্বয়ের ব্যবধান 5 সে. মি.; বৃত্তদ্বয়ের একটি সরল সাধারণ স্পর্শক অঙ্কিত করিয়া স্পর্শবিন্দুদ্বয়ের দূরত্ব মাপ।

৪। দুইটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ যথাক্রমে 1·5 ও 3 সে. মি., এবং কেন্দ্রদ্বয়ের ব্যবধান 5 সে. মি.; বৃত্তদ্বয়ের একটি তির্যক সাধারণ স্পর্শক অঙ্কিত করিয়া স্পর্শবিন্দুদ্বয়ের দূরত্ব মাপ।

৫। A ও B দুইটি বৃত্তের কেন্দ্র; বৃত্তদ্বয় সম্পূর্ণ বহিঃস্থভাবে অবস্থিত; উহাদের তির্যক সাধারণ স্পর্শকদ্বয় F বিন্দুতে ছেদ করিলে প্রমাণ কর যে

(ক) স্পর্শকদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণ AF দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হয়;

এবং (খ) AF, FB একরেখীয়।

৬। প্রমাণ কর যে (১) দুইটি বৃত্তের কেন্দ্রদ্বয়, (২) সরল সাধারণ স্পর্শকদ্বয়ের ছেদবিন্দু, ও (৩) তির্যক সাধারণ স্পর্শকদ্বয়ের ছেদ বিন্দু, একই রেখায় অবস্থিত।

৭। যদি R, r দুইটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ হয় এবং d কেন্দ্রদ্বয়ের ব্যবধান হয়, প্রমাণ কর যে

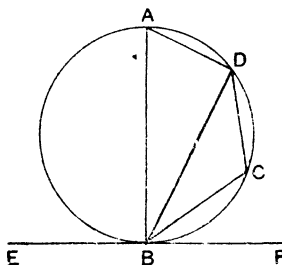
(ক) একটি সরল সাধারণ স্পর্শকের পরিমাণ $\sqrt{\{d^2-(R-r)^2\}}$, এবং সিদ্ধান্ত কর কোন্ সর্তে একটি বৃত্ত অপরটির সম্পূর্ণ অন্তঃস্থ হইবে।

(খ) একটি তির্যক সাধারণ স্পর্শকের পরিমাণ $\sqrt{\{d^2-(R+r)^2\}}$, এবং সিদ্ধান্ত কর কোন্ সর্তে একটি বৃত্ত অপরটির সম্পূর্ণ বহিঃস্থ হইবে।

৮। কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে এককেন্দ্রীয় বৃত্তশ্রেণীতে স্পর্শক অঙ্কিত করিয়া, স্পর্শবিন্দুগুলির সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

উপপাদ্য ৪৬ (Theorem 46)

কোন বৃত্তের কোন একটি বিন্দুতে স্পর্শক এবং তথা হইতে একটি জ্যা টানিলে, এই জ্যা ও স্পর্শকের অন্তর্ভূত কোণদ্বয় যথাক্রমে একান্তর বৃত্তাংশস্থিত কোণদ্বয়ের সমান হইবে।

[The angles which a tangent to a circle makes with a chord drawn through the point of contact are respectively equal to the angles in the alternate segments of the circle. *Euc.* 3. 23.]

চিত্র ২৪১

ABC বৃত্তের B বিন্দুতে EBF স্পর্শক ও BD জ্যা টানা হইয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে

(ক) কোণ FBD = একান্তর বৃত্তাংশস্থিত কোণ BAD ;

(খ) কোণ EBD = " " " BCD।

B বিন্দু হইতে বৃত্তের BA ব্যাস টান।

BAD চাপের অনুবন্ধী চাপ BCDর উপর যে কোন বিন্দু C লও ;

AD, DC, CB যোগ কর।

প্রমাণ। (ক) যেহেতু, ADB অর্ধবৃত্তস্থ কোণ,

∴ ইহা এক সমকোণ ; (উপ. ৩৯)

∴ $\angle DBA + \angle BAD$ = এক সমকোণ।

পুনশ্চ, ∵ EBF স্পর্শক এবং BA বৃত্তের ব্যাস,

∴ $\angle FBA$ = এক সমকোণ (উপ. ৪৩)

∴ $\angle DBA + \angle BAD = \angle FBA = \angle FBD + \angle DBA$;

∴ $\angle FBD = \angle BAD$।

(খ) যেহেতু, ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ ;

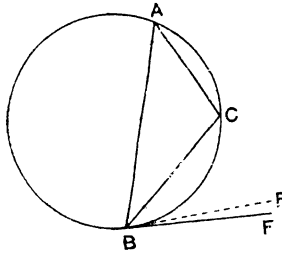
$\therefore$ $\angle BCD$, $\angle BAD$ র সম্পূরক ;

আবার, $\angle EBD$, $\angle FBD$ র সম্পূরক ;

কিন্তু, $\angle FBD = \angle BAD$; (প্রমাণিত)

$\therefore$ $\angle EBD = \angle BCD$ ।

উপপাদ্য ৪৭ (Theorem 47)

বৃত্তের একটি জ্যার সীমাবিন্দু হইতে যদি এরূপ কোন সরলরেখা টানা হয় যাহাতে এই রেখা ও জ্যার অন্তর্ভূত কোণ, একান্তর বৃত্তাংশস্থিত কোণের সমান, তবে সরলরেখাটি বৃত্তের স্পর্শক ।

চিত্র ২৪২

ABC বৃত্তের B বিন্দু হইতে BC জ্যা ও BF সরলরেখা লওয়া গেল, যাহাতে $\angle FBC = \angle BAC$ হয়।

প্রমাণ করিতে হইবে যে BF বৃত্তের স্পর্শক ।

প্রমাণ। মনে কর, BF স্পর্শক না হইয়া অপর একটি রেখা BF′ স্পর্শক হইবে। $\therefore$ $\angle F'BC = \angle BAC$ । (উপ. ৪৬)

কিন্তু $\angle FBC = \angle BAC$ (স্বীকার) ; অতএব $\angle F'BC = \angle FBC$;

$\therefore$ FB, F′B একই সরলরেখায় অবস্থিত, অর্থাৎ, BF বৃত্তের স্পর্শক ।

মন্তব্য। এই উপপাদ্যটি উপপাদ্য ৪৬ এর বিপরীত ।

অনুশীলনী ৫৪

১। কোন বৃত্ত হইতে এরূপ একটি বৃত্তাংশ ছিন্ন কর যাহার কোণ কোন নির্দিষ্ট কোণের সমান হইবে। (অনুচ্ছেদ ৮৪ দ্রষ্টব্য)

২। একটি বৃত্তের একটি জ্যা $2''$ দীর্ঘ। ইহার সহিত ইহার প্রান্তস্থিত স্পর্শকের নতি 30°। বৃত্তের ব্যাসার্ধ কত ?

৩। একটি বৃত্তে A বিন্দুতে TAS স্পর্শক টান ; AB জ্যা লও যাহাতে $\angle TAB = 60^\circ$ হয়, এবং অপর একটি জ্যা BC ॥ TS টান। প্রমাণ কর যে ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ।

৪। ৪৬ উপপাদ্যের চিত্রে, যদি C বিন্দু BCD চাপের মধ্যবিন্দু হয়, প্রমাণ কর (ক) BC, DBF কোণের দ্বিখণ্ডক, (খ) C বিন্দু হইতে BF ও BDর উপর লম্ব দুইটি সমান দৈর্ঘ্যের।

৫। ABCD সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর যে AOB, COD ত্রিভুজদ্বয়ের পরিকেন্দ্র পরস্পর স্পর্শ করিবে।

৬। $\angle ABC$ র অন্তর্বৃত্তটি BC, CA, AB বাহুকে যথাক্রমে D, E, F বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে। $\angle ABC = 68^\circ$, $\angle ACB = 66^\circ$ হইলে ΔDEF এর শীর্ষকোণগুলি নির্ণয় কর।

৭। PQRS চতুর্ভুজের QP = PS, SQ = SR, $\angle PSQ = 55^\circ$, $\angle QSR = 40^\circ$। দেখাও QR, PQS বৃত্তের স্পর্শক।

৮। কোন বৃত্তস্থ A, B, C তিনটি বিন্দু। BC বর্ধিত হইয়া A বিন্দুস্থিত স্পর্শককে P বিন্দুতে ছেদ করে। দেখাও, যে $\angle ACP = \angle PAB$।

৯। কোন বৃত্তের একটি জ্যা AB এবং A বিন্দুর স্পর্শক AC পরস্পর সমান। CB যোগ করিলে অথবা যোগ করিয়া বর্ধিত করিলে ইহা বৃত্তকে D বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর AD = CD।

১০। দুইটি বৃত্তের A বিন্দুতে পরস্পর অন্তঃস্পর্শ ঘটিয়াছে। কোন একটি সরলরেখা বৃত্তদ্বয়কে পর্যায়ক্রমে B, C, D এবং E বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর $\angle CAB = \angle EAD$।

১১। O ABD বৃত্তের কেন্দ্র, ABP বৃত্তের পরিধির উপরি স্থিত। ABP বৃত্তের B বিন্দুস্থ স্পর্শক BD, ABD বৃত্তকে D বিন্দুকে ছেদ করে। প্রমাণ কর BO, $\angle ABD$ কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

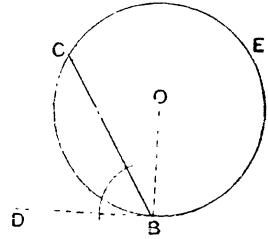
১২। দুইটি বৃত্ত পরস্পর A ও B বিন্দুতে ছেদ করে। A বিন্দুর ভিতর দিয়া একটি রেখা বৃত্তদ্বয়কে X ও Y বিন্দুতে ছেদ করে। X ও Y বিন্দুতে স্পর্শকদ্বয় P বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর X, P, Y, C বৃত্তস্থ।

১৩। কোন বৃত্তের অন্তর্লিখিত একটি ত্রিভুজ ABC। A বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শকের সমান্তরাল যে কোন সরলরেখা AB ও AC কে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করিলে B, C, P, Q বিন্দু চারিটি বৃত্তস্থ হইবে প্রমাণ কর।

১৪। ABC কোন বৃত্তের অন্তর্লিখিত ত্রিভুজ। $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক BC কে D বিন্দুতে এবং ADর লম্বদ্বিখণ্ডক বর্ধিত BC কে E বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর AE বৃত্তটির স্পর্শক। ΔABC সমদ্বিবাহু হইলে কি হইবে ?

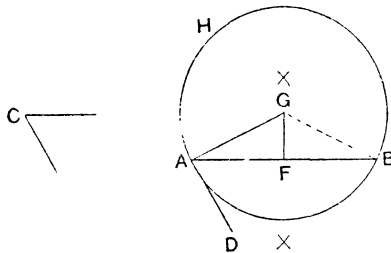
৮৪। নির্দিষ্ট বৃত্তাংশ অঙ্কনের পূর্বকরণীয় সম্পাদ্য (LEMMA)। কোন নির্দিষ্ট বৃত্তে একটি বৃত্তাংশ নির্দেশ করিতে হইবে যাহাতে বৃত্তাংশস্থিত কোণটি কোন নির্দিষ্ট কোণের সমান হয়।

অঙ্কন। বৃত্তের পরিধিতে যে কোন B বিন্দু লও; OB যোগ কর, এবং উহার উপর BD লম্ব টান। BD স্পর্শক হইল। ∠DBC = ∠A করিয়া BC জ্যা টান।

CEB বৃত্তাংশটি নির্ণেয় বৃত্তাংশ হইবে।

চিত্র ২৪৩

সম্পাদ্য ২৩ (Problem 23)

কোন নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর এরূপ একটি বৃত্তাংশ অঙ্কন করিতে হইবে যেন বৃত্তাংশস্থিত কোণ কোন নির্দিষ্ট কোণের সমান হয়।

[On a given straight line to describe a segment of a circle which shall contain an angle equal to a given angle.]

চিত্র ২৪৪

AB নির্দিষ্ট সরলরেখা, ∠C নির্দিষ্ট কোণ।

ABর উপর একটি বৃত্তাংশ অঙ্কন করিতে হইবে যাহাতে ঐ বৃত্তাংশস্থিত কোণ = ∠C হয়।

অঙ্কন। ABর A বিন্দুতে, ∠BAD = ∠C অঙ্কন কর।

A বিন্দুতে, ADর উপর AG লম্ব টান ; এবং ABর লম্বদ্বিখণ্ডক FG টান। মনে কর, এই দুই লম্ব G বিন্দুতে ছেদ করিল।

G বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া GA ব্যাসার্ধ লইয়া বৃত্ত অঙ্কন কর। এই বৃত্তের AHB বৃত্তাংশের কোণ নির্দিষ্ট কোণের সমান হইবে।

প্রমাণ। GB যোগ কর।

∵ FG, ABর লম্বদ্বিখণ্ডক, ∴ GA = GB ;

অতএব বৃত্তটি Bর মধ্য দিয়া যাইবে।

∵ AG ⊥ AD (অঙ্কন) ;

∴ AD বৃত্তের স্পর্শক ;

∴ AHB বৃত্তাংশস্থিত কোণ = ∠BAD (উপ. ৪৬)

= নির্দিষ্ট ∠C।

অনুশীলনী ৫৫

১। ভূমি, শীর্ষকোণ ও (১) একটি বাহু, (২) উন্নতি, (৩) ভূমির দ্বিখণ্ডক মধ্যমা দেওয়া আছে। ত্রিভুজ তিনটি অঙ্কিত কর।

২। ভূমি, শিরঃকোণ ও এই কোণের সমদ্বিখণ্ডক ভূমিকে যে বিন্দুতে ছেদ করে তাহা দেওয়া আছে. ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

৩। ভূমি, শিরঃকোণ ও অপর দুই বাহুর সমষ্টি দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

৪। ভূমি, শিরঃকোণ ও অপর দুই বাহুর অন্তর দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

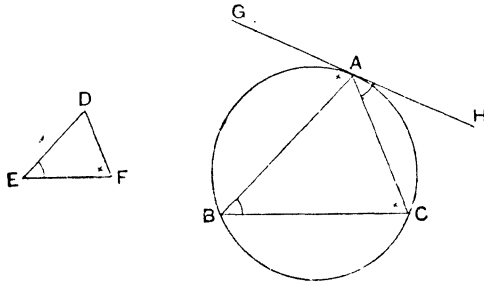
৫। একটি জ্যা অঙ্কন করিয়া একটি বৃত্তকে এমন দুইটি অংশে বিভক্ত কর যেন একটি অংশের কোণ অপর অংশের কোণের দ্বিগুণ হয়।

৬। ভূমি, শিরঃকোণ দেওয়া আছে, একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত কর।

৭। একটি নির্দিষ্ট বৃত্তে এমন একটি ত্রিভুজ ABC অন্তর্লিখিত কর যাহার ∠A কোন নির্দিষ্ট কোণের সমান হইবে এবং যাহার AB, AC বাহুদ্বয় দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দুর ভিতর দিয়া যাইবে।

সম্পাদ্য ২৪ (Problem 24)

একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সহিত সদৃশকোণ করিয়া কোন নির্দিষ্ট বৃত্তে একটি ত্রিভুজ অন্তর্লিখিত করিতে হইবে।

[To inscribe a triangle in a given circle, equiangular to a given triangle. *Euc.* 4. 2.]

চিত্র ২৪৫

ABC নির্দিষ্ট বৃত্ত, DEF নির্দিষ্ট ত্রিভুজ।

ABC বৃত্তে DEF ত্রিভুজের সদৃশকোণ করিয়া একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করিতে হইবে।

অঙ্কন। বৃত্তের যে কোন A বিন্দুতে স্পর্শক GAH টান এবং AB, AC জ্যা দুইটি এরূপ ভাবে টান যে $\angle GAB = \angle F$ ও $\angle HAC = \angle E$ হয়।

BC যোগ কর।

$\triangle ABC$ নির্ণেয় ত্রিভুজ হইবে।

প্রমাণ। $\angle F = \angle GAB =$ একান্তর বৃত্তাংশস্থিত $\angle C$;

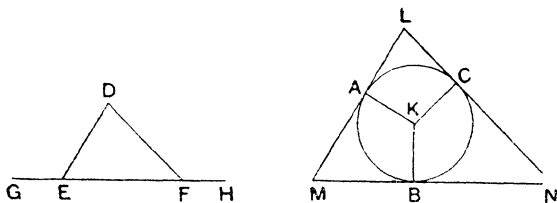
$\angle E = \angle HAC =$,, ,, $\angle B$;

এবং $\angle D =$ অবশিষ্ট $\angle A$।

$\therefore$ $\triangle ABC$, $\triangle DEF$ এর সহিত সদৃশকোণ।

সম্পাদ্য ২৫ (Problem 25)

একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সহিত সদৃশকোণ করিয়া কোন নির্দিষ্ট বৃত্তে একটি ত্রিভুজ পরিলিখিত করিতে হইবে।

[To circumscribe a triangle about a given circle, equiangular to a given triangle. *Euc*. **4**. 3.]

চিত্র ২৪৬

K, নির্দিষ্ট বৃত্ত ABCর কেন্দ্র, ও DEF নির্দিষ্ট ত্রিভুজ।

DEF ত্রিভুজের সহিত সদৃশকোণ করিয়া ABC বৃত্তে পরিলিখিত একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। EF বাহুকে উভয়দিকে G ও H পর্যন্ত বর্ধিত কর।

বৃত্তটির যে কোন একটি ব্যাসার্ধ KB লও।

K বিন্দুতে ∠DEG এর সমান করিয়া ∠BKA অঙ্কন কর, এবং ∠DFH এর সমান করিয়া ∠BKC অঙ্কন কর।

মনে কর, A ও C বিন্দুদ্বয়ে বৃত্তটি ছেদিত হইল।

A, B, C বিন্দুতে বৃত্তের তিনটি স্পর্শক অঙ্কন কর;

মনে কর, স্পর্শকত্রয় L, M, N বিন্দুত্রয়ে ছেদ করিল।

△LMN উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইবে।

প্রমাণ। MBKA চতুর্ভুজের ∠A + ∠B = দুই সমকোণ;

∴ ∠M (অর্থাৎ ∠LMN) = ∠AKB এর সম্পূরক

= ∠DEG এর সম্পূরক = ∠DEF;

সেইরূপ, NBKC চতুর্ভুজে, ∠B + ∠C = দুই সমকোণ;

∴ ∠N (অর্থাৎ ∠LNM) = ∠BKC এর সম্পূরক

$= \angle DFH$ এর সম্পূরক $= \angle DFE$;

এবং $\angle L$ (অর্থাৎ $\angle MLN$) = অবশিষ্ট $\angle D$ ।

$\therefore$ $\triangle LMN$, $\triangle DEF$ এর সহিত সদৃশকোণ।

অনুশীলনী ৫৬

১। $1\cdot4''$ ব্যাসার্ধের একটি বৃত্ত অঙ্কন কর। ইহার দুইটি বৃত্তাংশ অঙ্কন কর যাহার কোণ যথাক্রমে $54°$ ও $126°$ হইবে। এই দুইটি বৃত্তাংশের উন্নতির মাপ কত ?

২। $1''$ দৈর্ঘ্য একটি ভূমির উপর একটি $35°$ কোণধারক বৃত্তাংশ অঙ্কন কর। বৃত্তাংশটির উন্নতি কত ?

৩। একটি 6 সে. মি. ভূমির উপর অবস্থিত ত্রিভুজগুলির শীর্ষবিন্দুর সঞ্চারপথ অঙ্কন কর, যাহাতে শীর্ষকোণ এক সমকোণের সমান হয়। একই ভূমির উপর অবস্থিত ত্রিভুজগুলির শীর্ষবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর, যাহার উন্নতি 2 সে. মি.। এইরূপে 6 সে. মি. ভূমির উপর একটি ত্রিভুজ অঙ্কন কর যাহার শীর্ষকোণ $= 90°$, এবং উন্নতি $= 2$ সে. মি.। ত্রিভুজের অপর বাহুদ্বয় মাপ।

৪। ABC ত্রিভুজ অঙ্কন কর যাহার $AB = 1''$, $AC = 1\cdot6''$ $\angle A = 97°$। $\angle BAC$র অভ্যন্তরস্থ একটি বিন্দু O নির্ণয় কর, যাহাতে AB একটি $60°$ পরিমাণ সংমুখ কোণ উৎপন্ন করে, ও AC একটি $106°$ পরিমাণ সংমুখ কোণ উৎপন্ন করে। OAর দৈর্ঘ্য কত ?

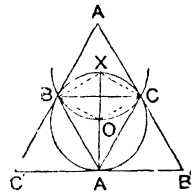
৫। $2''$, $3''$, $4''$ দীর্ঘ বাহুবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কন কর। ইহার অন্তর্লিখিত ও পরিলিখিত বৃত্তগুলি অঙ্কন করিয়া তাহাদের ব্যাসার্ধগুলির পরিমাণ নির্ণয় কর।

৬। $0\cdot8''$ ব্যাসার্ধের একটি বৃত্তে একটি ত্রিভুজ অঙ্কন কর, যাহার শীর্ষকোণের পরিমাণ $50°$, $60°$, $70°$ হইবে। বাহুগুলির মাপ কত ?

৭। 2 সে. মি. ব্যাসার্ধের একটি বৃত্ত লইয়া তাহার চারিদিকে একটি ত্রিভুজ পরিলিখিত কর, যাহার কোণগুলি $48°$, $60°$, $72°$ হইবে।

৮। কোন বৃত্তের (ক) অন্তর্লিখিত (খ) পরিলিখিত এক সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কন কর।

অঙ্কন। (ক) O, বৃত্তটির কেন্দ্র ; বৃত্তটির যে কোন একটি ব্যাস AX লও। Xকে কেন্দ্র করিয়া এবং XO ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কন কর ; মনে কর, ইহাতে নির্দিষ্ট বৃত্তটি B, C বিন্দুতে ছেদিত হইল। AB, AC, BC যোগ কর।

ABC সমবাহু ত্রিভুজটি অন্তর্লিখিত হইল।

চিত্র ২৪৭

(খ) A, B, C বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শকত্রয় অঙ্কিত করিলে উহারা A′, B′, C′ ত্রিভুজটি উৎপন্ন করিল ; ইহাই বৃত্তের পরিলিখিত সমবাহু ত্রিভুজ।

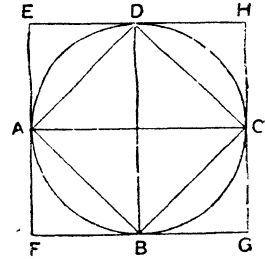
৯। কোন বৃত্তে একটি সুষম ষড়ভুজ অন্তর্লিখিত কর ; অতঃপর, পরিলিখিত সুষম ষড়ভুজ অঙ্কন কর।

[কোন বৃত্তে অন্তর্লিখিত সুষম ষড়ভুজের বাহু ঐ বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান]

১০। কোন বৃত্তে (ক) অন্তর্লিখিত (খ) পরিলিখিত এক বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর।

অঙ্কন। বৃত্তের যে কোন একটি ব্যাস AC লও, এবং ইহার লম্ব অপর ব্যাস BD অঙ্কন কর।

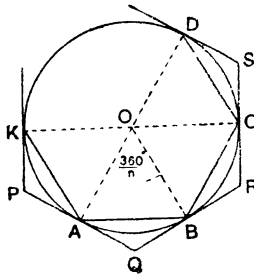
(ক) A,B,C.D যোগ কর তাহা হইলে ABCD অন্তর্লিখিত বর্গক্ষেত্র হইল।

(খ) A,B,C, D বিন্দুতে বৃত্তের চারিটি স্পর্শক অঙ্কন কর। মনে কর, তাহারা E, F, G, H বিন্দুতে ছেদ করিল। তাহা হইলে EFGH পরিলিখিত বর্গক্ষেত্র হইল।

চিত্র ২৪৮

১১। কোন বৃত্তের অন্তর্লিখিত একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কন করিয়া একটি সুষম অষ্টভুজ অন্তর্লিখিত কর। পরিলিখিত সুষম অষ্টভুজ কিরূপে অঙ্কন করা যাইতে পারে? (ইঙ্গিত। লম্ব ব্যাসদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণ চারিটির সমদ্বিখণ্ডক রেখাগুলি অঙ্কিত কর)

সম্পাদ্য ২৬ (Problem 26)

কোন নির্দিষ্ট বৃত্তে এক সুষম বহুভুজ (ক) অন্তর্লিখিত, (খ) পরিলিখিত করিতে হইবে।

[In and about a given circle to describe a regular polygon.]

চিত্র ২৪৯

ABC নির্দিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র O।

(ক) ABCর অন্তর্লিখিত n-সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট একটি সুষম ক্ষেত্র অঙ্কন করিতে হইবে।

এবং (খ) ABCর পরিলিখিত n-সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট একটি সুষম ক্ষেত্র অঙ্কন করিতে হইবে।

অঙ্কন। (ক) পরিধিস্থ যে কোন A বিন্দু লইয়া কেন্দ্রের সহিত যুক্ত কর ; এবং O বিন্দুতে $\frac{360^\circ}{n}$ এর সমান করিয়া $\angle AOB$ অঙ্কন কর। মনে কর, B, বৃত্তের ছেদবিন্দু। AB যোগ কর। অতঃপর AB জ্যার সমান করিয়া BC, CD,…জ্যাগুলি ক্রমে ক্রমে অঙ্কন করিয়া যাও। এইরূপে সুষম n-ভুজটি অঙ্কিত হইবে।

(খ) পূর্বোক্ত অঙ্কন শেষ করিয়া A, B, C, D,…বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শক অঙ্কন কর। এই স্পর্শকগুলি যে PQRS…ক্ষেত্রটি উৎপন্ন করিল তাহা নির্ণেয় পরিলিখিত সুষম n-ভুজ।

প্রমাণ। (ক) $\because \angle AOB = \angle BOC = \angle COD \cdots = \frac{360^\circ}{n}$,

এবং $OA = OB = OC \cdots\cdots\cdots\cdots =$ বৃত্তের ব্যসার্ধ ;

$\therefore \quad \angle OAB = \angle OBA = \angle OBC = \angle OCB \cdots\cdots$ ।

অতএব, $\angle KAB = \angle ABC = \angle BCD = \cdots\cdots\cdots$;

অর্থাৎ, বহুভুজের ভুজগুলি সমান ও শীর্ষকোণগুলি সমান বলিয়া ABCD…K সুষম n-ভুজ।

(খ) $\because \quad \angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \cdots$,

$\therefore$ তাহাদের সম্পূরক কোণগুলিও পরস্পর সমান হইবে ;

অর্থাৎ, $\angle AQB = \angle BRC = \angle CSD \cdots\cdots$ ।

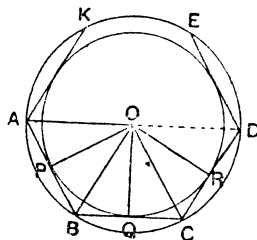
পুনশ্চ, OQ, OR, OS…যোগ করিলে স্পষ্ট প্রতীত হয় যে AQ, QB, BR RC, … প্রত্যেকে কেন্দ্রস্থলে $\frac{180^\circ}{n}$ কোণ উৎপন্ন করিতেছে, এবং $\triangle OAQ$, $\triangle OQB$, $\triangle OBR$, $\triangle ORC$…পরস্পর সর্বসম ;

$\therefore \quad PQ = QR = RS = \cdots\cdots$;

অর্থাৎ, PQRS…পরিলিখিত n-ভুজটি সুষম।

সম্পাদ্য ২৭ (Problem 27)

কোন নির্দিষ্ট সুষম বহুভুজের (ক) অন্তর্লিখিত, (খ) পরিলিখিত একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে।

[In and about a regular polygon to describe a circle.]

চিত্র ২৫০

ABCD···K একটি নির্দিষ্ট সুষম বহুভুজ ; ইহার (ক) অন্তর্লিখিত ও (খ) পরিলিখিত বৃত্তদ্বয় অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। ∠ABC ও ∠BCD কে BO ও CO দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত করিলে BO, CO র ছেদবিন্দু O, নির্ণেয় বৃত্তদ্বয়ের কেন্দ্র হইবে।

OA, OB, OC,···OK যুক্ত কর ; এবং, O হইতে AB, BC, CD,··· ভুজগুলির উপর যথাক্রমে OP, OQ, OR,···লম্ব অঙ্কন কর।

(ক) Oকে কেন্দ্র করিয়া এবং OP ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কন কর। ইহাই অন্তর্লিখিত বৃত্ত হইল।

(খ) Oকে কেন্দ্র করিয়া এবং OA ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কন কর। ইহাই পরিলিখিত বৃত্ত হইল।

প্রমাণ। ∵ OBA, OBC ত্রিভুজদ্বয়ের
BA = BC, (স্বীকার)
OB সাধারণ বাহু,
অন্তর্ভূত ∠OBA = অন্তর্ভূত ∠OBC, (অঙ্কন)
∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।
∴ $\angle OCB = \angle OAB = \frac{1}{2}\angle A = \frac{1}{2}\angle C$;
∴ OC, ∠Cর অন্তর্দ্বিখণ্ডক ; এবং OA = OC।

অনুরূপে, OD প্রভৃতি ∠D প্রভৃতির অন্তর্দ্বিখণ্ডক।

এতদ্বারা বুঝা যায় যে, সুষম বহুভুজের যাবতীয় কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক O বিন্দুতে মিলিত হয়, এবং O হইতে কোণগুলির দূরত্ব পরস্পর সমান। অতএব, পরিলিখিত বৃত্তটি শীর্ষকোণ দিয়া যাইবে।

পুনশ্চ. ∵ O, ∠ B র অন্তর্দ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত,

$$\therefore OP = OQ;$$

তদ্রূপ, $OQ = OR = \cdots\cdots$।

অতএব, O-বিন্দু, ভুজগুলি হইতে সমদূরবর্তী হওয়ায় অন্তর্লিখিত বৃত্তটি প্রত্যেক ভুজকে স্পর্শ করিবে।

অনুশীলনী ৫৭

১। $1''$ ব্যাসার্ধের একটি বৃত্ত অঙ্কন করিয়া ইহার পরিলিখিত একটি সুষম ষড়্ভুজ অঙ্কিত কর। ষড়্ভুজটির একটি বাহুর দৈর্ঘ্য কত?

২। একটি বৃত্তের পরিলিখিত একটি সমবাহুত্রিভুজ ও একটি সুষমষড়্ভুজ অঙ্কিত করা হইল। দেখাও যে. ত্রিভুজটির একটি বাহু ষড়্ভুজটির একটি বাহুর তিন গুণ।

৩। $1''$ দৈর্ঘ্যের একটি রেখা AB লও। চাঁদার সাহায্যে ACর উপর একটি সুষম পঞ্চভুজ অঙ্কন কর। পঞ্চভুজটির পরিলিখিত বৃত্তের ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

৪। প্রমাণ কর যে, যে কোন সুষম বহুভুজের অন্তঃস্থ একটি বিন্দু হইতে বাহুগুলির উপর যত লম্ব টানা যাইবে তাহার সমষ্টি একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা।

[Prove that the sum of the distances of any point within a regular polygon from its sides is constant.]

৮৫। সুষম বহুভুজ ও বৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয়

২৭. সম্পাদ্যের চিত্র হইতে প্রতীত হয় যে সুষম n-ভুজ ABCD···Kর OAB, OBC, প্রভৃতি n-সংখ্যক ত্রিভুজগুলি সর্বসম, এবং OP, OQ, প্রভৃতি বাহুর উপর লম্বগুলি পরস্পর সমান। যদি একটি ভুজের দৈর্ঘ্য $= s$ হয়, এবং একটি লম্বের দৈর্ঘ্য $= a$ হয়, তবে উক্ত n-সংখ্যক ত্রিভুজের যে কোন একটির ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}sa$, এবং n-ভুজটির ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}nsa$ হইবে। অর্থাৎ,

সুষম বহুভুজের ক্ষেত্রফল = অর্ধপরিসীমা × বাহুর পরিকৈন্দ্রিক দূরত্ব ···(A)

এক্ষণে, সহজেই ধারণা করা যায় যে বহুভুজের ভুজসংখ্যা (n) যতই বর্ধিত হইবে ততই ক্ষেত্রফলটি পরিবৃত্তের ক্ষেত্রফলের নিকটবর্তী হইবে। চরম অবস্থায় n অসীম (infinite) হইলে উপলব্ধি হয় যে, বাহুগুলি লোপ পাইয়া বিন্দুতে পরিণত হইয়াছে এবং বহুভুজটির সহিত পরিবৃত্তের কোন প্রভেদ নাই। এই অবস্থায় বাহুগুলির পরিসীমা পরিধির দৈর্ঘ্যের সহিত সমান হইবে ; এবং বাহুর পরিকৈন্দ্রিক দূরত্ব পরিব্যাসার্ধের সহিত সমান হইবে। অতএব এই ব্যসার্ধ $= r$ ধরিলে

যেহেতু, **বৃত্তের পরিধি** $= 2\pi r$, অতএব,

বৃত্তের ক্ষেত্রফল = অর্ধপরিধি × ব্যাসার্ধ

$= \frac{1}{2}.2\pi r.\ r. = \pi r^2$

$= \pi \times$ **ব্যাসার্ধের বর্গ** ...(B)

বৃত্তের দুইটি ব্যাসার্ধের অন্তর্ভূত কোণ d° হইলে উক্ত ব্যাসার্ধদ্বয় দ্বারা খণ্ডিত

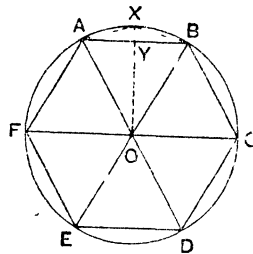
চাপের দৈর্ঘ্য $= \frac{d}{360} \times$ **বৃত্তের পরিধি**

$$= \frac{d}{360} \times 2\pi r = \frac{\pi d r}{180} \quad \cdots(C)$$

এবং **বৃত্তকলার কালি** $= \frac{d}{360} \times$ **বৃত্তের কালি**

$$= \frac{\pi d r^2}{360} \quad \cdots(D)$$

৮৬। **π এর আসন্নমান** (Approximate value of π)

মনে কর, ABCDEF একটি O-বিন্দু বৃত্তের (যাহার ব্যাসার্ধ r) অন্তর্লিখিত সুষম ষড়ভুজ। ইহার $\angle AOB = 360^\circ \div 6 = 60^\circ$, এবং $\angle A = \angle B = \cdots = \angle F = 120^\circ$; অধিকন্তু, $\angle OAB = \angle OBA$ হওয়ায় প্রত্যেকটি 60°। অতএব, OAB, OBC,...OFA ত্রিভুজগুলি সর্বসম। সুতরাং $AB = r$।

চিত্র ২৫১

(১) প্রথমতঃ, পরিবৃত্তের পরিধির দৈর্ঘ্য, মোটামুটি ভাবে ষড়ভুজের পরিসীমার দৈর্ঘ্যের সমান ধরিলে

$$\pi = \frac{\text{পরিধি}}{\text{ব্যাস}} = \frac{6r}{2r} = 3 \text{ হয়।}$$

(২) দ্বিতীয়তঃ, AB কে Y বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত কর, এবং OY কে পরিধিস্থ X বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত কর। AX, BX সংযুক্ত কর।

AOY, BOY ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হওয়ায় $\angle AOY = \angle BOY = 30°$; এবং, তজ্জন্য জ্যা AX = BX। অর্থাৎ, AX, অন্তর্লিখিত সুষম দ্বাদশভুজের একটি বাহু।

$$\therefore \quad OY^2 = OA^2 - AY^2 = r^2 - \frac{1}{4}r^2 = \frac{3}{4}r^2;$$

$$\therefore \quad OY = \frac{\sqrt{3}}{2}r \text{।} \quad \therefore \quad XY = OX - OY = r - \frac{\sqrt{3}}{2}r;$$

এবং, $AX = \sqrt{XY^2 + AY^2} = \sqrt{r^2\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}r^2}$

$= r\sqrt{(2 - \sqrt{3})}$।

অতএব $\pi = \frac{\text{পরিধি}}{\text{ব্যাস}} = \frac{12r\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2r} = 6\sqrt{2-\sqrt{3}} = 3{\cdot}102$।

(৩) এই প্রণালীতে অগ্রসর হইয়া (অর্থাৎ, অন্তর্লিখিত বহুভুজের বাহুসংখ্যা ক্রমে ক্রমে বর্ধিত করিয়া) আমরা π এর অধিকতর নিকট 'আসন্নমান' নির্ণয় করিতে পারি। কোন নির্দিষ্ট **প্রমেয়** (commensurable) মানের অভাবে ব্যবহারিক কার্যে সাধারণতঃ ইহার মান $3\frac{1}{7}$ ধরা হয়। আসন্নমানের প্রয়োজনীয় পরিমাণ অনুসারে π এর মান $3{\cdot}1416$ বা $3{\cdot}1415926$ ধরা হইয়া থাকে।

অনুশীলনী ৫৮

$(\pi = 3\frac{1}{7})$

১। 7″, 3″·5 ও 4″·7 ব্যাসার্ধের বৃত্তগুলির পরিধি নির্ণয় কর।

২। 7″, 8·5 মিঃ দীর্ঘ ব্যাসার্ধের বৃত্তদ্বয়ের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

৩। একটি বৃত্তাকৃতি লৌহবলয়ের (ring) অন্তঃ- ও বহিঃ-ব্যাসার্ধ যথাক্রমে 6 ও 8·5 ফুট হইলে, উহার ক্ষেত্রফল কত? ইহার সমান আর একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর।

৪। অঙ্কিত একটি বৃত্ত হইতে এককেন্দ্রীয় আর একটি বৃত্ত দ্বারা ইহার ক্ষেত্রফলের অর্ধাংশ কাটিয়া লও।

(যদি নির্ণেয় বৃত্তের অর x হয়, তবে $2\pi x^2 = \pi r^2$, ইত্যাদি)

৫। যে সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি ও উচ্চতা কোন বৃত্তের যথাক্রমে পরিধি ও ব্যাসার্ধের সমান তাহার কালি ঐ বৃত্তের কালির সমান।

৬। একটি বৃত্তাকৃতি বলয় আছে। এমন একটি ট্রাপিজিয়ম্ অঙ্কিত হইল যাহার সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য বলয়ের বহিঃ- ও অন্তঃ-পরিধির সমান এবং যাহার উচ্চতা বলয়ের প্রস্থের সমান। দেখাও যে বলয় ও ট্রাপিজিয়মের ক্ষেত্রফল সমান।

পঞ্চম অধ্যায়

বৃত্তাঙ্কন বিষয়ক বিবিধ সম্পাদ্য

৮৭। বৃত্ত সংক্রান্ত পূর্বালোচনা হইতে প্রতীত হয় যে, কেন্দ্র-বিন্দুর সঞ্চারপথ কোন নির্দিষ্ট সর্তে একটি সরলরেখা, একটি বৃত্ত বা বৃত্তের পরিধি হইবে। এ সম্বন্ধে অধীত বিষয়গুলি হইতে একটি সংক্ষিপ্ত সার সঙ্কলন করা সমীচীন হইবে বিবেচনায় নিম্নলিখিত দৃষ্টান্তগুলিতে পাঠকগণের দৃষ্টি আকর্ষণ করিতেছি। তাঁহারা স্বীয় চেষ্টায় অঙ্কন সাহায্যে বিষয়গুলির যাথার্থ্য উপলব্ধি করিতে সমর্থ হইবেন আশা করা যায়।

(১) দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া অতিক্রম করিয়া যাইবে এরূপ বৃত্তগুলির কেন্দ্রের সঞ্চারপথ—একটি সরলরেখা ;

(২) দুইটি সমান্তরাল নির্দিষ্ট সরলরেখাকে স্পর্শ করিবে এরূপ বৃত্তগুলির কেন্দ্রের সঞ্চারপথ—একটি সরলরেখা ;

(৩) দুইটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে স্পর্শ করিবে এরূপ বৃত্তগুলির কেন্দ্রের সঞ্চারপথ—একটি সরলরেখা ;

(৪) একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করিবে এরূপ বৃত্তগুলির কেন্দ্রের সঞ্চারপথ—একটি সরলরেখা ;

(৫) একটি নির্দিষ্ট বৃত্তের কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করিবে এরূপ বৃত্তগুলির কেন্দ্রের সঞ্চারপথ—একটি সরলরেখা ;

(৬) দুইটি এককেন্দ্রীয় নির্দিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শ করিবে এরূপ বৃত্তগুলির সঞ্চারপথ—একটি (এককেন্দ্রীয়) বৃত্ত ;

(৭) কোন নির্দিষ্ট সরলরেখাকে স্পর্শ করিবে এরূপ নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তগুলির কেন্দ্রের সঞ্চারপথ—একটি (সমান্তরাল) সরলরেখা ;

(৮) কোন নির্দিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শ করিবে এরূপ নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তগুলির কেন্দ্রের সঞ্চারপথ একটি (এককেন্দ্রীয়) বৃত্ত ;

(৯) কোন বৃত্তের সমবিন্দু অসমান জ্যাগুলির মধ্যবিন্দুর সঞ্চার পথ—একটি বৃত্ত ;

(১০) কোন বৃত্তের পরস্পর সমান জ্যাগুলির মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ —একটি বৃত্ত ;

(১১) কোন বৃত্তের পরস্পর সমান্তরাল জ্যাগুলির মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ—একটি সরলরেখা ;

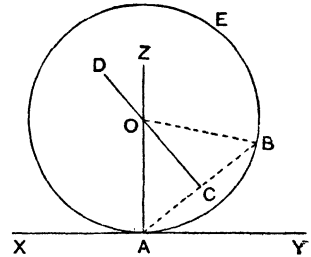
(১২) কোন ভূমির উপর একই পার্শ্বে অঙ্কিত পরস্পর সমান শিরঃকোণ বিশিষ্ট ত্রিভুজগুলির শীর্ষবিন্দুর সঞ্চারপথ—একটি বৃত্তের চাপ।

এক্ষণে বিভিন্ন ও নির্দিষ্ট সর্তে কিরূপে বৃত্তাঙ্কন করা যাইতে পারে তাহার উদাহরণ দেওয়া যাইতেছে। প্রত্যেক ক্ষেত্রে নির্ণেয় বৃত্তের কেন্দ্র-বিন্দুর সঞ্চারপথ কি কি হইবে তৎপ্রতি বিশেষভাবে অবহিত হইতে হইবে।

১। কোন নির্দিষ্ট সরলরেখার নির্দিষ্ট বিন্দুতে রেখাটিকে স্পর্শ করিবে এবং অপর একটি বিন্দু দিয়া যাইবে এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To construct a circle which shall touch a given straight line at a given point in it, and pass through another given point.]

উপাত্ত। XY সরলরেখা, তদুপরি A বিন্দু, এবং B অপর একটি বিন্দু— এই তিনটি নির্দিষ্ট আছে। (১) XYকে A বিন্দুতে স্পর্শ করিবে এবং (২) B বিন্দু দিয়া যাইবে এই দুইটি সর্তানুযায়ী একটি বৃত্ত অঙ্কন করিতে হইবে।

বিশ্লেষণ। (১) নির্ণেয় বৃত্তের স্পর্শক XY হইবে, অতএব ইহার কেন্দ্র, A বিন্দুতে উহার লম্বের উপর থাকিবে ; (২) বৃত্তটি, A ও B দিয়া যাইবে, অতএব ইহার কেন্দ্র, ঐ দুই বিন্দুসংযোজক সসীম সরলরেখার লম্বদ্বিখণ্ডকের উপর থাকিবে। অতএব, ঐ দুইটি লম্বের ছেদ-বিন্দুই নির্ণেয় বৃত্তের কেন্দ্র হইবে।

চিত্র ২৫২

অঙ্কন। AZ ⊥ XY টান, এবং ABর লম্বদ্বিখণ্ডক CD টান। ধর, উভয়ে O বিন্দুতে ছেদ করিল। Oকে কেন্দ্র করিয়া OA ব্যাসার্ধ লইয়া ⊙ABE অঙ্কন কর। ইহাই নির্ণেয় বৃত্ত।

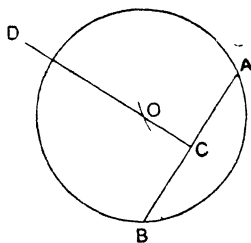
প্রমাণ। ∵ XY ⊥ OA, ∴ XY বৃত্তের স্পর্শক।

পুনশ্চ, ∵ O, ABর লম্বদ্বিখণ্ডকের উপরিস্থ, ∴ OA = OB।

অতএব বৃত্তটি B বিন্দু দিয়া যাইবে। ∴ ⊙ ABE নির্ণেয় বৃত্ত।

২। নির্দিষ্ট দুইটি বিন্দু A, B দিয়া যাইবে ও একটি নির্দিষ্ট পরিমাণ ব্যাসার্ধের হইবে এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কন করিতে হইবে।

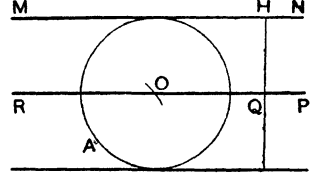
[To describe a circle of given radius, to pass through two given points.]

অঙ্কন। AB সসীম রেখার লম্বদ্বিখণ্ডক CD টান। বৃত্তের কেন্দ্র CDর উপর থাকিবে। A (কিংবা B)-কে কেন্দ্র করিয়া এবং নির্দিষ্ট রেখার দৈর্ঘ্য Kকে ব্যাসার্ধ লইয়া বৃত্ত অঙ্কন কর; এই বৃত্তের উপর নির্ণেয় কেন্দ্র থাকিবে; ধর, উহা CD কে O বিন্দুতে ছেদ করিল। (অপর বিন্দু O′, DCর বর্ধিতাংশের উপর থাকিবে—চিত্রে নাই)। O বিন্দুই বৃত্তটির কেন্দ্র (অপর বৃত্তটির কেন্দ্র O′)। (প্রমাণ সহজ)

চিত্র ২৫৩

দ্রষ্টব্য। অঙ্কন ব্যর্থ হইবে যদি $K < \frac{1}{2}$ AB হয়।

৩। দুইটি নির্দিষ্ট সমান্তরাল রেখা MN ও KGকে স্পর্শ করিবে এবং নির্দিষ্ট বিন্দু A দিয়া যাইবে এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কন করিতে হইবে।

[To describe a circle to pass through a given point and to touch two parallel straight lines.]

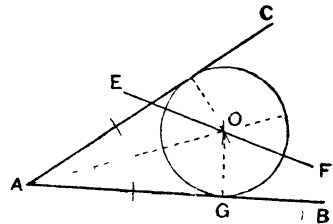
অঙ্কন। KG রেখার উপর G বিন্দু হইতে তদুপরি GH লম্ব টান; ধর, লম্বটি MNকে H বিন্দুতে ছেদ করিল। GHএর লম্বদ্বিখণ্ডক QR টান। উহার কোন বিন্দু বৃত্তের কেন্দ্র হইবে।

এখন, A বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া QG (কিংবা QH) ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তের চাপ অঙ্কন কর; ধর, ইহা QR রেখাকে O বিন্দুতে ছেদ করিল। O, বৃত্তটির কেন্দ্র হইবে। Oকে কেন্দ্র করিয়া OA ব্যাসার্ধ লইয়া নির্ণেয় বৃত্তটি অঙ্কন কর।

চিত্র ২৫৪

দ্রষ্টব্য। দুইটি বৃত্ত সম্ভব। নির্ণেয় বৃত্ত অসম্ভব হইবে যদি A বিন্দু MN ও KG র বাহিরে অবস্থিত হয়।

৪। দুইটি পরস্পরচ্ছেদী সরলরেখা AB, ACকে স্পর্শ করিবে এবং কেন্দ্র নির্দিষ্ট রেখা EF এর উপর অবস্থিত হইবে, এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কন করিতে হইবে।

[To describe a circle to touch two given intersecting straight lines and to have its centre on another straight line.]

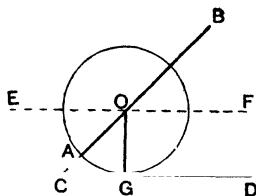
অঙ্কন। $\angle BAC$র দ্বিখণ্ডক AO টান। ধর, উহা EFকে O বিন্দুতে ছেদ করিল। O হইতে $OG \perp AB$ টান। উদ্দিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র O, এবং ব্যাসার্ধ OG হইবে।

দ্রষ্টব্য। যদি $EF \parallel AO$ হইয়া যায় তবে অঙ্কন ব্যর্থ হইবে।

চিত্র ২৫৫

৪ ক। একটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শ করিবে এবং একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া গমন করিবে এমন একটি নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধের বৃত্ত অঙ্কিত কর। ঐ প্রকার কতগুলি বৃত্ত সম্ভব?

[To describe a circle of given radius to touch a given circle and to pass through a given point. How many such circles are possible?]

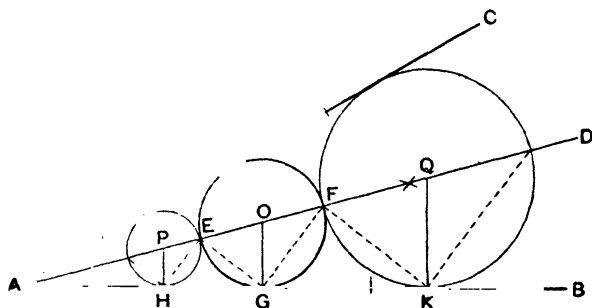
৫। কোন নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধের (দৈর্ঘ্য r) এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কন করিতে হইবে যে উহার কেন্দ্র AB রেখায় থাকিবে এবং উহা অপর নির্দিষ্ট রেখা CD কে স্পর্শ করিবে।

[To describe a circle of given radius (r) having its centre on a straight line, and touching another straight line.]

চিত্র ২৫৬

অঙ্কন। CD হইতে নির্দিষ্ট r একক ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য পরিমাণ দূরে একটি সরলরেখা EF, CDর সমান্তরাল করিয়া টান। ধর, EF, ABকে O বিন্দুতে ছেদ করিল।

O, উদ্দিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র। OG, CD র উপর লম্ব টান। OGর দৈর্ঘ্য = r একক হওয়ায় বৃত্তটি CDকে স্পর্শ করিবে।

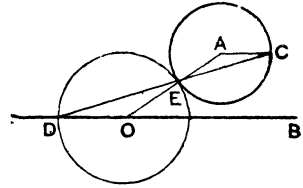
৬। দুইটি নির্দিষ্ট সরলরেখা AB, ACর অভ্যন্তরে ধারাবাহিক ক্রমে পরস্পর স্পর্শকারী বৃত্ত সমুদয় অন্তর্লিখিত করিতে হইবে।

[Between two given straight lines AB and AC to inscribe a succession of circles in contact.]

চিত্র ২৫৭

অঙ্কন। ∠BACর সমদ্বিখণ্ডক AD টান। ADর উপর যে কোন বিন্দু O লও; এবং AB, ACকে স্পর্শ করিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কন কর; ধর, বৃত্তটি ADকে E,F বিন্দুদ্বয়ে ছেদ করিল। OG ⊥ AB টান। EG, FG যোগ কর। EH, FG র সমান্তরাল করিয়া, এবং HP, GO র সমান্তরাল করিয়া টান। FK, EG র সমান্তরাল করিয়া এবং KQ, GOর সমান্তরাল করিয়া টান।

P ও Qকে কেন্দ্র করিয়া যথাক্রমে PH ও QK কে ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি বৃত্ত অঙ্কন কর। তাহা হইলে P-কেন্দ্র বৃত্ত, O-কেন্দ্র বৃত্ত এবং Q-কেন্দ্র বৃত্ত ধারাবাহিক ক্রমে স্পর্শ করিবে। এইরূপে দুই পার্শ্বে যথেচ্ছসংখ্যক বৃত্তাঙ্কন করা যাইতে পারে। (প্রমাণ সহজ)

৭। কোন DB রেখায় অবস্থিত D বিন্দু দিয়া যাইবে, DBর উপর কেন্দ্র থাকিবে এবং কোন নির্দিষ্ট বৃত্তকে (যাহার কেন্দ্র A) স্পর্শ করিবে, এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কন করিতে হইবে।

[To describe a circle to touch a given circle, have its centre in a given straight line, and pass through a given point in the straight line.]

চিত্র ২৫৮

অঙ্কন। নির্দিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র A হইতে AC, DB র সমান্তরাল করিয়া টান। CD যোগ কর। ধর, CD নির্দিষ্ট বৃত্তকে E বিন্দুতে ছেদ করিল। AE যোগ করিয়া বর্ধিত কর; ধর, AE, DB কে O বিন্দুতে ছেদ করিল। O, উদ্দিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র হইবে।

প্রমাণ। $\angle AEC = \angle ACE = \angle ODE$; এবং $\angle AEC = \angle OED$ (বিপ্রতীপ কোণ)। $\therefore \angle ODE = \angle OED$; $\therefore OE = OD$।

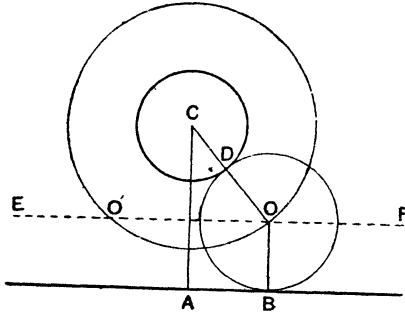
৭ ক। দুইটি সমান্তরাল সরলরেখা ও ইহাদের ভেদক এই তিনটি রেখাকে স্পর্শ করিবে এমন একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে। এরূপ কতগুলি বৃত্ত সম্ভব? বৃত্তগুলি কি সব সমান?

[To construct a circle to touch a pair of parallel straight lines and a transversal. How many solutions are possible? Will the circles be all equal?]

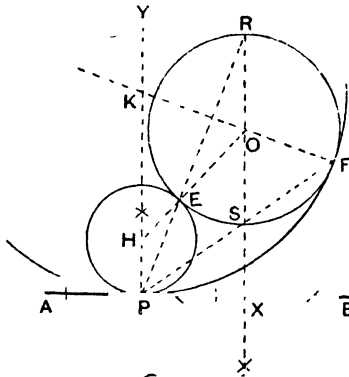
৮। কোন নির্দিষ্ট বৃত্ত এবং কোন নির্দিষ্ট সরলরেখাকে স্পর্শ করিবে এরূপ একটি নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধের বৃত্ত অঙ্কন করিতে হইবে।

[To describe a circle of given radius to touch a given circle and a given straight line.]

C নির্দিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র, r নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধ, এবং AB নির্দিষ্ট সরলরেখা।

অঙ্কন। AB হইতে r পরিমাণ দূরে EF, ABর সমান্তরাল করিয়া টান। উদ্দিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র EF এর উপর আছে। Cকে কেন্দ্র করিয়া এবং নির্দিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ ও r এর সমষ্টিকে নূতন ব্যাসার্ধ করিয়া একটি এককেন্দ্রীয় বৃত্ত অঙ্কন কর। ধর, ইহা EF রেখাকে O, O´ বিন্দুদ্বয়ে ছেদ করিল। তাহা হইলে, O উদ্দিষ্ট একটি বৃত্তের কেন্দ্র হইবে। (O´ অপর বৃত্তের কেন্দ্র)। (প্রমাণ সহজ)

চিত্র ২৫৯

৯। কোন নির্দিষ্ট বৃত্তকে (যাহার কেন্দ্র O) স্পর্শ করিবে এবং একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা ABকে নির্দিষ্ট বিন্দু Pতে স্পর্শ করিবে, এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কন করিতে হইবে।

[To describe a circle to touch a given circle and a given straight line at given point.]

চিত্র ২৬০

O নির্দিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র, AB নির্দিষ্ট রেখার P নির্দিষ্ট বিন্দু

অঙ্কন। OX, PY প্রত্যেকটি ABর উপর লম্ব টান। ধর, OX নির্দিষ্ট বৃত্তকে R,S বিন্দুদ্বয়ে ছেদ করিল। PR সংযুক্ত কর। ধর, ইহা নির্দিষ্ট বৃত্তকে E বিন্দুতে ছেদ করিল। OE যোগ কর। ধর, উহা বর্ধিত হইয়া PY রেখাকে H বিন্দুতে ছেদ করিল। তাহা হইলে H উদ্দিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র হইবে ; এবং HP ব্যাসার্ধ হইবে।

প্রমাণ। ∵ RX ∥ HP, ∴ ∠HPE = একান্তর ∠ERO = ∠OER = বিপ্রতীপ ∠HEP ∴ HE = HP।

দ্রষ্টব্য। PS যোগ করিয়া উক্ত প্রণালী অবলম্বনে নির্ণেয় বৃত্তের আর একটি বৃত্তও পাওয়া যায় ; ইহার কেন্দ্র K-বিন্দু এবং ব্যাসার্ধ KP। ২৬০ চিত্রে দুইটি বৃত্তই অঙ্কিত হইয়াছে। H-কেন্দ্র বৃত্ত নির্দিষ্ট বৃত্তকে বহিঃস্পর্শ করিয়াছে এবং K-কেন্দ্র বৃত্ত উহাকে অন্তঃস্পর্শ করিয়াছে।

১০। কোন নির্দিষ্ট সরলরেখা ABকে স্পর্শ করিবে এবং একটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে (যাহার কেন্দ্র O) P বিন্দুতে স্পর্শ করিবে, এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কন করিতে হইবে।

[To describe a circle to touch a given straight line, and a given circle at a given point.]

চিত্র ২৬১

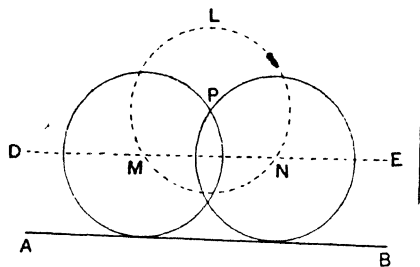
O, নির্দিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র, P বৃত্তের উপরিস্থ নির্দিষ্ট বিন্দু এবং AB নির্দিষ্ট রেখা।

অঙ্কন। OX, ABর উপর লম্ব টান। ধর, ইহা বর্ধিত করিলে নির্দিষ্ট বৃত্তকে R বিন্দুতে ছেদ করিল। RP সংযুক্ত করিয়া বর্ধিত কর ; ধর, ইহা AB রেখাকে E বিন্দুতে ছেদ করিল।

E বিন্দুতে ABর উপর লম্ব অঙ্কন কর। OP যোগ করিয়া বর্ধিত কর; ধর, ইহা লম্ব EHকে H বিন্দুতে ছেদ করিল। তাহা হইলে H উদ্দিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র হইবে এবং HP ব্যাসার্ধ হইবে। (প্রমাণ, HP = HE)

দ্রষ্টব্য। এক্ষেত্রেও নির্ণেয় আর একটি বৃত্ত সম্ভব। ইহা ২৬১ চিত্রে প্রদর্শিত হইয়াছে। ইহার কেন্দ্র K এবং ব্যাসার্ধ KP।

১১। এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে যাহা কোন নির্দিষ্ট P বিন্দু দিয়া যাইবে, এবং নির্দিষ্ট c ব্যাসার্ধের হইবে, এবং একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা ABকে স্পর্শ করিবে।

[To describe a circle which shall pass through a given point, have a given radius, and touch a given straight line.]

চিত্র ২৬২

বিশ্লেষণ। (১) নির্ণেয় বৃত্তের কেন্দ্রটি P হইতে c একক দূরে থাকায় ইহা এমন একটি বৃত্তের পরিধির উপর থাকিবে, যাহার কেন্দ্র হইল P এবং ব্যাসার্ধ c (২৬২ চিত্রে, ফুট্‌কি-চিহ্নাঙ্কিত বৃত্ত); এবং

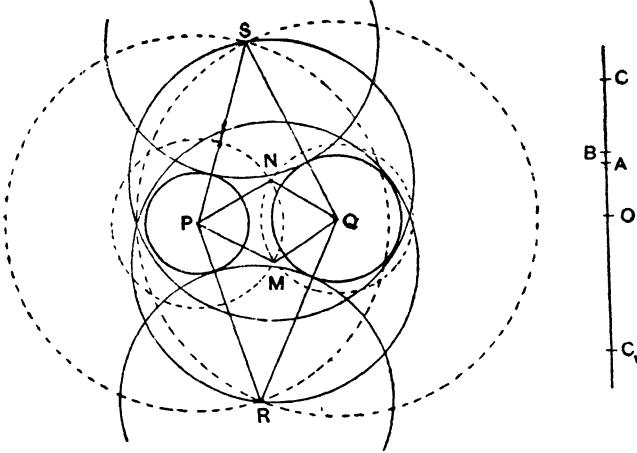
(২) কেন্দ্রটি ABর সমান্তরাল এবং ইহা হইতে c একক দূরবর্তী সরলরেখায় থাকিবে। (উপরি চিত্রে, ফুট্‌কি-চিহ্নাঙ্কিত সরলরেখা)

এই সর্তগুলি পূর্ণ করিতে পারে সেই বিন্দু, যাহা উভয় সঞ্চারপথের সাধারণ।

অঙ্কন। P কে কেন্দ্র করিয়া এবং c ব্যাসার্ধ লইয়া ⊙ LMN অঙ্কন কর। AB হইতে c ব্যবধানে, এবং AB রেখার P বিন্দুর পার্শ্বেই, DE ∥ AB টান। ধর, ⊙ LMN ও রেখা DE দুই বিন্দুতে ছেদ করিল, যথা M ও N। এখন M ও N কে কেন্দ্র করিয়া ও c ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি বৃত্ত অঙ্কন কর। এই দুইটি বৃত্তই নির্ণেয় দুইটি বৃত্ত হইবে।

প্রশ্ন। বৃত্তদ্বয় পরস্পর ছেদ করে কি সর্তে?

১২। দুইটি স্থির বৃত্তকে স্পর্শ করিবে এমন নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধের একটি বৃত্ত অঙ্কন করিতে হইবে।

[To construct a circle of given radius to touch two given circles.]

চিত্র ২৬৩

উপরি চিত্রে গাঢ়রেখাঙ্কিত বৃত্তদ্বয় (কেন্দ্র P,Q) নির্দিষ্ট আছে ; ধর, উহাদের ব্যাসার্ধের পরিমাণ যথাক্রমে OA, OB। ধর, স্পর্শকারী উদ্দিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ = OC (কিংবা OC_1)।

অঙ্কন। (১) P ও Q কে কেন্দ্র করিয়া এবং যথাক্রমে AC_1, BC_1 (নির্দিষ্ট বৃত্ত ও উদ্দিষ্ট বৃত্তের দুই সমষ্টিফল) ব্যাসার্ধ লইয়া (ফুট্‌কি-চিহ্নিত) দুইটি বৃত্ত অঙ্কন কর ; (২) P ও Q কে কেন্দ্র করিয়া এবং যথাক্রমে AC, BC (নির্দিষ্ট বৃত্ত ও উদ্দিষ্ট বৃত্তের দুই অন্তরফল) ব্যাসার্ধ লইয়া (ফুট্‌কিচিহ্নিত) অপর দুইটি বৃত্ত অঙ্কন কর। ধর, (১) দফায় অঙ্কিত বৃত্তদ্বয় S ও R বিন্দুতে, ও (২) দফায় অঙ্কিত বৃত্তদ্বয় N ও M বিন্দুতে, পরস্পর ছেদ করিল।

এখন, S, R, N, M বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এবং OC ব্যাসার্ধ লইয়া চারিটি বৃত্ত অঙ্কন কর।

এই চারিটি বৃত্তই নির্দিষ্ট সর্তগুলি পূর্ণ করিবে। (১) R-কেন্দ্র ও S-কেন্দ্র বৃত্তদ্বয় বহিঃস্পর্শ করিবে। (PR, QR, PS, QS, ব্যাসার্ধের সমষ্টিফল)। M-কেন্দ্র ও N-কেন্দ্র বৃত্তদ্বয় অন্তঃস্পর্শকরিবে। (PN, QN, PM, QM, ব্যাসার্ধের অন্তরফল)।

ষষ্ঠ অধ্যায়

বৃত্ত ও ত্রিভুজ বিষয়ক বিবিধ প্রতিজ্ঞা

৮৮। **লম্ববিন্দু** (Ortho-centre), ও **পাদত্রিভুজ** (Pedal Triangle)

যে কোন ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় হইতে স্ব স্ব বিপরীত বাহুর উপর লম্ব টানিলে সেই লম্বত্রয় একই বিন্দুতে ছেদ করিবে; ইহা ইতঃপূর্বে প্রমাণিত হইয়াছে (পৃঃ ১৩৭ দ্রষ্টব্য)। সেই ছেদবিন্দুকে ত্রিভুজটির **লম্ব-বিন্দু** বলে; এবং বিপরীত বাহুর উপর লম্বত্রয়ের যে তিনটি পাদবিন্দু হইবে তাহা সংযুক্ত করিয়া যে অপর একটি ত্রিভুজ গঠিত হইবে, তাহাকে ঐ ত্রিভুজের **পাদ-ত্রিভুজ** বলে। পরবর্তী উপপাদ্যে উক্ত লম্বত্রয়ের সমবিন্দুতার বিকল্প প্রমাণ প্রণালী প্রদত্ত হইল।

(ক) উপপাদ্য [লম্ববিন্দু সংক্রান্ত]

কোন ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় হইতে স্ব স্ব বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বত্রয় সমবিন্দু।

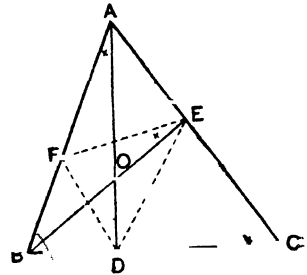
[The perpendiculars drawn from the vertices of a triangle to the opposite sides are concurrent.]

মনে কর, ABC ত্রিভুজের B, C শীর্ষ হইতে BE, CF লম্বদ্বয় O বিন্দুতে ছেদ করিল। AO যোগ কর এবং ইহাকে বর্ধিত করিয়া BCকে D বিন্দুতে ছেদ কর।

চিত্র ২৬৪

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$AD \perp BC$।

প্রমাণ। FE যোগ কর।

$\because$ $\angle AFO = \angle AEO =$ এক সমকোণ,

$\therefore$ AFOE একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ। (৩৬. উপপাদ্য)

$\therefore$ $\angle FAO = \angle OEF$। (৩৫. উপপাদ্য)

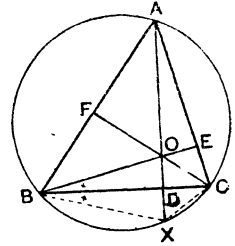
পুনশ্চ, ∵ ∠BFC = ∠BEC (প্রত্যেকে সমকোণ) ;
∴ BFEC একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ। (৩৬. উপপাদ্য)
∴ ∠FEB = ∠BCF। (৩৫. উপপাদ্য)
∴ ∠BAD = ∠BCF।
কিন্তু, ∠BCF, ∠ABC র পূরক কোণ ;
∴ ∠BAD, ∠ABC র পূরক কোণ ;
অতএব ∠ADB = এক সমকোণ ;

অর্থাৎ, AO কে বর্ধিত করিলে উহা BCর উপর লম্ব হইবে।

মন্তব্য। O বিন্দুই লম্ববিন্দু, এবং △DEF পাদত্রিভুজ।

অনু. ১। △OBC র লম্ববিন্দু A, △OCA র লম্ববিন্দু B, এবং △OAB র লম্ববিন্দু C ; ইহা সহজেই অনুমিত হইবে।

অতএব, O, A, B, C এই চারিটি বিন্দু লইয়া আলোচনা করিলে বুঝা যায় যে, এই চারিটির মধ্যে যে কোন তিনটি লইয়া যে ত্রিভুজ অঙ্কিত হইবে চতুর্থ বিন্দুটি তাহার লম্ববিন্দু হইবে।

অনু. ২। △ABC র পরিবৃত্ত অঙ্কিত করিয়া AD কে বর্ধিত করিলে বৃত্তটি X বিন্দুতে ছেদিত হইল (চিত্র ২৬৫)। এক্ষণে OD = DX হইবে। কারণ, BX, CX যোগ করিলে দেখা যায় যে ∠XBC = ∠XAC (উভয়ে XC চাপের উপর অবস্থিত) = ∠EBC। △OBD ও △XBD সর্বসম। ∴ OD = DX।

চিত্র ২৬৫

অনু. ৩। △OBC ও △XBC দুইটি সর্বসম, এবং ∠BOC = ∠BXC।

অনু. ৪। △BOCর যদি **পরিবৃত্ত** অঙ্কন করা যায়, তবে তাহা △ABCর পরিবৃত্তের সহিত সর্বসম হইবে।

কারণ, উভয় বৃত্তের সাধারণ জ্যা BC, ⊙ABCর পরিধিতে সংমুখ কোণ BXC উৎপন্ন করিতেছে এবং ⊙BOCর পরিধিতে সংমুখ কোণ BOC উৎপন্ন করিতেছে, এবং ঐ কোণদ্বয় পরস্পর সমান। ∴ BXC চাপ = BOC চাপ (২৬৫ চিত্রে অঙ্কিত নাই), এবং অনুবন্ধী বৃহত্তর চাপদ্বয়ও সমান হইবে। অতএব বৃত্তদ্বয় সর্বসম।

অনু. ৫। ABC, BOC, COA, AOB এই চারি ত্রিভুজের পরিবৃত্তগুলি পরস্পর সমান।

অনু. ৬। ∠EOF, ∠BOC, ∠BXC প্রত্যেকেই ∠BACর সম্পূরক।

অনুশীলনী ৫৯

১। কোন সমকোণী ত্রিভুজের লম্ববিন্দু কোথায় হইবে? চিত্র আঁকিয়া সমকোণী, সূক্ষ্মকোণী ও স্থূলকোণী ত্রিভুজের লম্ববিন্দুর অবস্থান ও পাদত্রিভুজের অবস্থান সম্বন্ধে আলোচনা কর।

২। সমবাহু ত্রিভুজের লম্ববিন্দু, ভরকেন্দ্র, পরিকেন্দ্র, অন্তঃকেন্দ্র, পরস্পর সমাপতিত।

৩। (ক) প্রতিজ্ঞার ২৬৪ চিত্রে নিম্নলিখিত চতুর্ভুজগুলি সবই বৃত্তস্থ প্রমাণ কর:—
BFEC, CDFA, AEDB. AFOE, BDOF, CEOD।

৪। (ক) প্রতিজ্ঞার ২৬৪ চিত্র হইতে প্রমাণ কর ∠DFO=∠EFO, এবং সিদ্ধান্ত কর যে,

কোন সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের লম্ববিন্দু ঐ সম্পর্কীয় পাদত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্রের উপর সমাপতিত হইবে।

[Of an acute-angled triangle, the ortho-centre is the in-centre of the pedal triangle.]

(খ) অন্যপ্রকার ত্রিভুজ সম্পর্কে এই প্রতিজ্ঞাটির কিরূপ পরিবর্তন হইতে পারে অনুসন্ধান কর।

সঙ্কেত। (চিত্র ২৬৪ দেখ) ∵ ∠OFE=∠OAE, এবং ∠OFD =∠OBD, এবং যেহেতু ∠OAE, ∠OBD প্রত্যেকেই ∠Cর পূরক, ∵ OF, ∠DFEর দ্বিখণ্ডক। অনুরূপে OE ও OD যথাক্রমে ∠DEF ও ∠FDEর দ্বিখণ্ডক। অতএব, O বিন্দু, পাদত্রিভুজ DEFএর অন্তঃকেন্দ্র হইতেছে।

৫। চিত্র ২৬৪ হইতে প্রমাণ কর, ∠AFE=∠BFD=∠C; ∠AEF= ∠DEC=∠B; ∠BDF=∠CDE=∠A।

৬। মূল ত্রিভুজ ABC, এবং ত্রিভুজত্রয় AFE, BDF, CDE পরস্পর সদৃশকোণী।

৭। (ক) প্রতিজ্ঞার চিত্রে যদি ED কে E′ বিন্দুতে বর্ধিত করা যায় তবে ∠E′DB =∠FDB হইবে। ইহা হইতে সিদ্ধান্ত কর যে. কোন ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুত্রয় সেই ত্রিভুজের পাদত্রিভুজের বহিঃকেন্দ্রত্রয়।

৮। কোন ত্রিভুজের একটি ভূমি এবং বিপরীত শীর্ষকোণের পরিমাণ দেওয়া থাকিলে ত্রিভুজটির লম্ববিন্দুর সঞ্চারপথ কি হইবে?

[Given the base and the vertical angle of a triangle to find the locus of the ortho-centre.]

৯। কোন ত্রিভুজের একটি ভুমি এবং লম্ববিন্দু দেওয়া থাকিলে ত্রিভুজটি কিরূপে অঙ্কিত করিবে ?

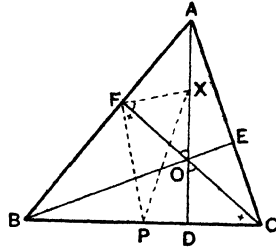
সঙ্কেত। BC এবং O দেওয়া থাকিলে, BO, CO কে বর্ধিত করিয়া C ও B হইতে যথাক্রমে ইহাদের উপর লম্ব অঙ্কন কর। লম্বদ্বয়ের ছেদবিন্দুই A। ABC নির্ণেয় ত্রিভুজ হইবে।

১০। পাদত্রিভুজের $\angle D = 180° - 2\angle A$, $\angle E = 180° - 2\angle B$, $\angle F = 180° - 2\angle C$।

১১। AOর মধ্যবিন্দু X এর সহিত BCর মধ্যবিন্দু P যোগ করিলে, XP রেখা F বিন্দুতে যে সংমুখ কোণ উৎপন্ন করিবে তাহা একটি সমকোণ।

চিত্র ২৬৬

সঙ্কেত। $\because$ AO, $\triangle$AFO এর পরিবৃত্তের ব্যাস, $\therefore$ X এই বৃত্তের কেন্দ্র। $\because$ $\angle XFO = \angle XOF = \angle COD$।

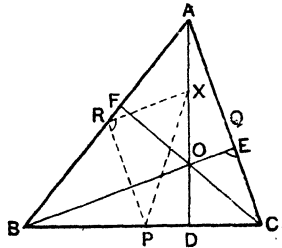
পুনশ্চ, $\because$ P বিন্দু, $\triangle$ BFC এর পরিকেন্দ্র ; $\because$ $\angle PFO = \angle FCP$।

কিন্তু, $\angle COD + \angle FCP =$ এক সমকোণ ; $\because$ $\angle XFP = \angle XFO + \angle PFO$ = এক সমকোণ।

মন্তব্য। $\angle XEP =$ এক সমকোণ। এবং $FX = \frac{1}{2}AO = EX$।

১২। প্রমাণ কর $XP \perp EF$। (চিত্র ২৬৬ দ্রষ্টব্য)

সঙ্কেত। FPX, EPX সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের—অতিভুজ XP সাধারণ, এবং XF = XE ; $\therefore$ তাহারা সর্বসম। এবং XFPF চতুর্ভুজের XP কর্ণটি একটি প্রতিসাম্য-অক্ষ। অতএব EF রেখার লম্বদ্বিখণ্ডক হইল XP।

১৩। ABর মধ্যবিন্দু R হইলে, XP, R বিন্দুতে যে সংমুখ কোণ উৎপন্ন করিবে তাহা একটি সমকোণ।

সঙ্কেত। $\because$ XR II EB, এবং PR II CA ; $\therefore$ $\angle XRP =$ BE ও ACর অন্তর্ভূত কোণ $= \angle E =$ এক সমকোণ।

চিত্র ২৬৭

১৪। XP ব্যাসের উপর অঙ্কিত বৃত্তের পরিধি, নিম্নলিখিত ছয়টি বিন্দু দিয়া যাইবে

X, E, F, P, Q, R।

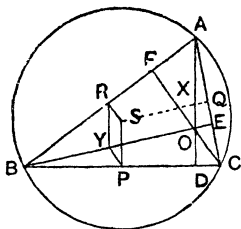
সঙ্কেত। ১১ ও ১৩ প্রশ্ন দ্রষ্টব্য।

১৫। Y ও Z যদি যথাক্রমে OB ও OCর মধ্যবিন্দু হয় তবে প্রমাণ কর যে নয়টি বিন্দু D, E, F, P, Q, R ও X, Y, Z সমবৃত্ত।

সঙ্কেত। YQ যোগ করিয়া দেখান যাইতে পারে যে উহাকে ব্যাস করিয়া যে বৃত্তটি অঙ্কিত হইবে তাহার পরিধিতে Y, F, D, P, Q, R থাকিবে; এবং ZR ব্যাস-গঠিত বৃত্তের পরিধিতে Z, D, E, P, Q, R আছে। কিন্তু এই দুই বৃত্ত স্বতন্ত্র নহে কারণ P, Q, R, তিনটি বিন্দু সাধারণ। এজন্য একটি বৃত্তের উপরই উক্ত নয়টি বিন্দু থাকিবে, এবং সেই বৃত্তের ব্যাসার্ধ $=\frac{1}{2}XP=\frac{1}{2}YQ=\frac{1}{2}ZR$। এই বৃত্তকে ত্রিভুজ ABCর **নববিন্দুবৃত্ত** (Nine-point circle) বলে। ইহার ইংরাজী অন্য নাম medioscribed circle। প্রশ্নটির বিকল্প প্রমাণ প্রণালী পরে প্রদত্ত হইয়াছে [উপ. (ঘ)]

(খ) উপপাদ্য [লম্ববিন্দু ও পরিকেন্দ্র সংক্রান্ত]

ত্রিভুজের লম্ববিন্দু হইতে উহার যে কোন শীর্ষের দূরত্ব, ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র হইতে উহার বিপরীত বাহুর দূরত্বের দ্বিগুণ।

[The distance of each vertex of a triangle from the ortho-centre is double the distance of the circum-centre from the opposite side]

চিত্র ২৬৮

ধর, S, ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র, X ও Y যথাক্রমে AO ও BOর মধ্যবিন্দু, P ও R যথাক্রমে BC ও ABর মধ্যবিন্দু।

SP, SR, RY, PY যোগ কর।

প্রমাণ করিতে হইবে যে AO = 2SP।

প্রমাণ। ∵ PY ∥ CF ∥ RS এবং RY ∥ AD ∥ SP ;

∴ SPYR একটি সামান্তরিক।

∴ SP = বিপরীত বাহু RY = $\frac{1}{2}$AO ;

অনুরূপে, SR = $\frac{1}{2}$OC, এবং SQ = $\frac{1}{2}$OB।

অনুশীলনী ৬০

১। ২৬৮ চিত্রে BPSR, CPSQ, AQSR প্রত্যেকেই সমবৃত্ত চতুর্ভুজ হইবে।

২। ২৬৮ চিত্রে ASPX এবং XSPO প্রত্যেকটি সামান্তরিক হইবে।

৩। ∠BSP = ∠CSP = ∠A ; ∠CSQ = ∠ASQ = ∠B এবং ∠ASR = ∠BSR = ∠C ; প্রমাণ কর।

৪। a, b, c যদি যথাক্রমে A, B, Cর বিপরীত বাহুগুলি হয় এবং R যদি পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ হয়, তবে

(ক) SA = SB = SC = R ;

(খ) 2SP = $\sqrt{4R^2 - a^2}$; 2SQ = $\sqrt{4R^2 - b^2}$; 2SR = $\sqrt{4R^2 - c^2}$।

৫। প্রমাণ কর (ক) ∠SAB = ∠CAD = 90° − ∠C ;

(খ) ∠SAC = ∠BAD = 90° − ∠B.

(গ) ∠SAO = ∠B ~ ∠C।

৬। OS এর মধ্যবিন্দুকে যদি N ধরা যায় তবে ইহা নববিন্দুবৃত্তের কেন্দ্র হইবে।

[(ক) প্রতিজ্ঞা ; ১৫ প্রশ্ন]

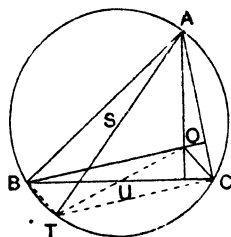
৭। O, ABC ত্রিভুজের লম্ববিন্দু, এবং AT উহার পরিবৃত্তের ব্যাস ; প্রমাণ কর যে, BTCO একটি সামান্তরিক।

∵ AT বৃত্তের ব্যাস, ∴ ∠ACT = ∠ABT = 90°।

∴ BO ও TC উভয়েই ACর উপর লম্ব,

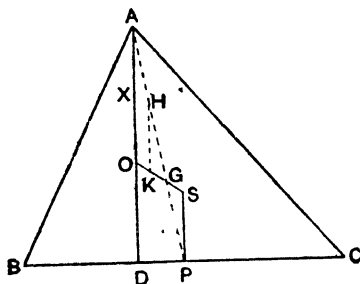
∴ BO ∥ TC ; এইরূপে OC ∥ BT।

∴ BTCO সামান্তরিক, এবং কর্ণদ্বয় পরস্পর U বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত হইবে।

চিত্র ২৬৯

(গ) উপপাদ্য

[পরিকেন্দ্র, ভরকেন্দ্র ও লম্ববিন্দু সংক্রান্ত]

যে কোন ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র, ভরকেন্দ্র ও লম্ববিন্দু সমরেখ হইবে।

[The circum-centre, the ortho-centre and the centroid of any triangle are in one straight line.]

চিত্র ২৭০

মনে কর, ABC ত্রিভুজের লম্ববিন্দু O এবং পরিকেন্দ্র S।

OS যোগ কর। BCর মধ্যবিন্দু P ও A যোগ কর। ধর, OS ও AP, G বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে G ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র।

ধর, H ও K, AG ও OGর যথাক্রমে মধ্যবিন্দুদ্বয়; HK যোগকর।

প্রমাণ। $\because$ HK $\parallel$ AO এবং $= \frac{1}{2}$AO ;

$\therefore$ HK $=$ SP এবং $\parallel$ SP।

এবং সহজেই প্রমাণ করা যায় যে, GHK, GPS ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

$\therefore$ GP $=$ GH ; কিন্তু GH $=$ HA, $\therefore$ GP $= \frac{1}{2}$ AG ;

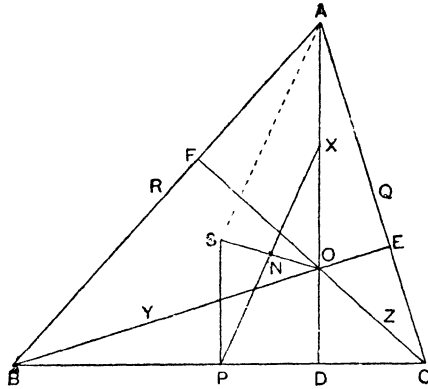
এবং, যেহেতু AP একটি মধ্যমা, সুতরাং, G বিন্দু, $\triangle$ABCর ভরকেন্দ্র, এবং ইহা OSএর উপর অবস্থিত।

প্রশ্ন। ত্রিভুজটি সমবাহু হইলে এই তিনটি বিন্দুর অবস্থান কিরূপ হইবে ?

(ঘ) উপপাদ্য

[**নববিন্দুবৃত্ত** (Nine-point circle) **সংক্রান্ত**]

কোন ত্রিভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দুত্রয়, শীর্ষবিন্দুগুলি হইতে বিপরীত বাহুসমূহের উপর অঙ্কিত লম্বত্রয়ের পাদবিন্দুত্রয়, এবং শীর্ষবিন্দু ও লম্ববিন্দুর সংযোজক রেখাত্রয়ের মধ্যবিন্দুত্রয় সর্বসমেত এই নয়টি বিন্দু একই বৃত্তের উপর থাকিবে।

[In any triangle, the mid-points of the sides, the feet of the perpendiculars from the vertices to the opposite sides, and the mid-points of the straight lines joining the vertices and the orthocentre are all concyclic.]

চিত্র ২৭১

ABC ত্রিভুজের AD, BE, CF শীর্ষবিন্দু হইতে লম্বত্রয়; O, লম্ববিন্দু; এবং D, E, F পাদবিন্দুত্রয়; P, Q, R, বাহুত্রয় BC, CA, ABর মধ্যবিন্দুত্রয়; এবং X, Y, Z যথাক্রমে AO, BO, COর মধ্যবিন্দুত্রয়।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

D, E, F ; P, Q, R ; X, Y, Z এই নয়টি বিন্দু একবৃত্তস্থ।

অঙ্কন। $\triangle$ABCর পরিকেন্দ্র S অঙ্কন করিয়া SA, SP, SO, XP যোগ কর।

মনে কর, XP ও OSএর ছেদবিন্দু N।

প্রমাণ। ∵ AX ∥ SP এবং $= \frac{1}{2}$AO = SP [(খ) প্রতিজ্ঞা]

∴ AXPS একটি সামান্তরিক।

∴ XP = AS = পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ = R ধর।

পুনশ্চ, ∵ XO ∥ SP এবং = SP,

∴ OXSP একটি সামান্তরিক, যাহার কর্ণদ্বয় XP, OS, N বিন্দুতে পরস্পর দ্বিখণ্ডিত হইয়াছে।

অতএব, NP = NX $= \frac{1}{2}$XP $= \frac{1}{2}$R।

Nকে কেন্দ্র করিয়া $\frac{1}{2}$R ব্যাসার্ধ লইয়া যে বৃত্ত অঙ্কিত হইবে তাহা

(১) D বিন্দু দিয়া যাইবে (∵ ∠XDP = এক সমকোণ),

(২) R বিন্দু দিয়া যাইবে (∵ RX ∥ BE ও RP ∥ AC, এবং ∠XRP = BE ও ACর অন্তর্ভূত কোণ = এক সমকোণ),

(৩) Q বিন্দু দিয়া যাইবে (অনুরূপ কারণে, ∠XQP = এক সমকোণ)।

অতএব দেখা গেল বৃত্তটি X, D, P, Q, R দিয়া যাইতেছে।

অনুরূপে, YQ রেখার মধ্যবিন্দুও N, এবং উক্ত পঞ্চবিন্দু বৃত্তটি Y, E, P, Q, R দিয়াও যাইবে ; এবং ZR রেখার মধ্যবিন্দুও N, এজন্য উক্ত বৃত্ত Z, F, P, Q, R দিয়া যাইবে।

অতএব, D, E, F, P, Q, R, X, Y, Z নয়টি বিন্দুই সমবৃত্ত।

সংজ্ঞা। নববিন্দুবৃত্তের কেন্দ্র Nকে **নববিন্দুকেন্দ্র** (Nine-point-centre or, mid-centre) বলে।

অনু. ১। নববিন্দুবৃত্তের ব্যাসার্ধ ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধের (circum-radius) অর্ধেক।

অনু. ২। ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র ও লম্ববিন্দু-সংযোজক সসীম রেখার মধ্যবিন্দুই নববিন্দুকেন্দ্র।

অনু. ৩। BOC, COA, AOB, ABC এই চারি ত্রিভুজের প্রত্যেকটির নববিন্দুবৃত্ত এক।

অনু. ৪। XP, YQ, ZR প্রত্যেকটিই নববিন্দুবৃত্তের ব্যাস।

অনু. ৫। পাদত্রিভুজের পরিবৃত্তই মূলত্রিভুজের নববিন্দুবৃত্ত।

অনুশীলনী ৬১

১। কোন ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র, ভরকেন্দ্র, নববিন্দুকেন্দ্র ও লম্ববিন্দু সমরেখ।

সংকেত। পরিকেন্দ্র S, লম্ববিন্দু O এবং নববিন্দুকেন্দ্র N একই রেখায় অবস্থিত, ইহা মূল উপপাদ্যে প্রমাণিত হইয়াছে। AP যোগ কর; মনে কর ইহা SOকে G বিন্দুতে ছেদ করে; XA ∥ OS টান; মনে কর ইহা APকে H বিন্দুতে ছেদ করে; প্রমাণ কর $\Delta AHX \equiv \Delta PGS$, তাহা হইলে $AG = 2AH = 2GP$, সুতরাং G ভরকেন্দ্র।

২। সমকোণী ত্রিভুজের নববিন্দুকেন্দ্র কোন একটি মধ্যমার মধ্যবিন্দু।

৩। কোন ত্রিভুজের ভূমি BC ও শীর্ষকোণ ∠A নির্দিষ্ট আছে। উক্ত ভূমির উপর যে সমুদয় সমান শিরঃকোণ বিশিষ্ট ত্রিভুজ অঙ্কিত হইবে, তাহাদের নববিন্দুকেন্দ্রগুলির সঞ্চারপথ কি?

৪। নববিন্দু বৃত্ত, লম্ববিন্দু ও ত্রিভুজের যে কোন দুই শীর্ষকোণের অন্তর দেওয়া আছে; সেই মূলত্রিভুজটি কিরূপে অঙ্কিত করা যাইবে?

৫। ABC ত্রিভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দু হইতে বিপরীত কোণের দ্বিখণ্ডকের উপর লম্ব অঙ্কন করা হইল, এই লম্বত্রয় দ্বারা যে ত্রিভুজ A′B′C′ গঠিত হইল তাহার নববিন্দুবৃত্ত ও ও ত্রিভুজ ABCর নববিন্দুবৃত্ত একই।

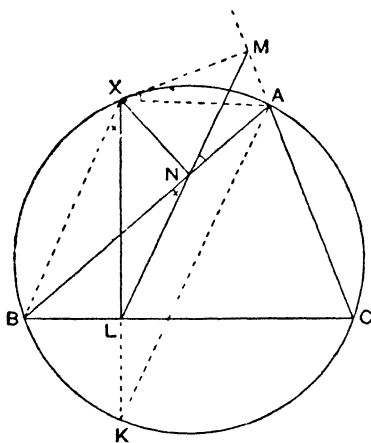
৬। ABC ত্রিভুজের O লম্ববিন্দু হইতে A শীর্ষকোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক ও বহির্দ্বিখণ্ডকের উপর OM, OL দুইটি লম্ব টানিয়া প্রমাণ কর যে L, M, N (নববিন্দুকেন্দ্র) ও P (BCর মধ্যবিন্দু) সমরেখ হইয়া যায়।

---

(৬) উপপাদ্য

[**পাদরেখা** (pedal line) **সংক্রান্ত**]

কোন ত্রিভুজের পরিবৃত্তস্থ যে কোন বিন্দু হইতে উহার বাহুগুলির উপর অঙ্কিত লম্বগুলির তিনটি পাদবিন্দু এক সরলরেখায় অবস্থিত।

[The feet of the perpendiculars drawn to the sides of a triangle from any point on its circum-circle, are collinear.]

চিত্র ২৭২

X, △ABCর পরিবৃত্তের উপর একটি বিন্দু, এবং XL, XM, XN যথাক্রমে BC, CA (চিত্রে বাহু বর্ধিত), ABর উপর লম্ব।

LN, MN যোগ কর।

প্রমাণ করিতে হইবে যে

LN, MN একই সরলরেখায় অবস্থিত।

XA, XB যোগ কর।

প্রমাণ। ∵ ∠XLB = ∠XNB = এক সমকোণ ;

∴ XNLB চতুর্ভুজটি বৃত্তস্থ।

পুনশ্চ, ∵ ∠XNA + ∠XMA = দুই সমকোণ (প্রত্যেকে সমকোণ) ;

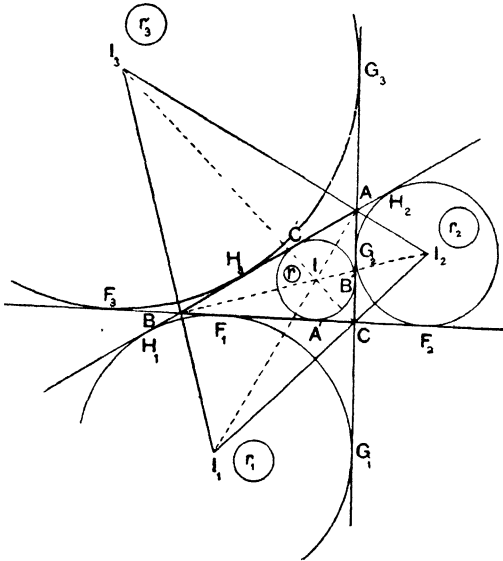
∴ XNAM চতুর্ভুজটি বৃত্তস্থ।

∴ ∠XAM = ∠XNM (একই বৃত্তাংশস্থিত কোণ)।

(চ) অন্তর্বৃত্ত ও বহির্বৃত্ত সংক্রান্ত

পূর্বে অন্তর্বৃত্ত ও বহির্বৃত্তের ব্যাসার্ধগুলির নির্ণয় করা হইয়াছে ; যথা,

$$r = \frac{\triangle}{s}; \quad r_1 = \frac{\triangle}{s-a}; \quad r_2 = \frac{\triangle}{s-b}; \quad r_3 = \frac{\triangle}{s-c};$$

$\triangle$ বলিতে সংক্ষেপত ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল বুঝাইবে, এবং s = ত্রিভুজের অর্ধপরিসীমা। নিম্ন চিত্রাঙ্কন হইতে এই সকল বৃত্ত সংক্রান্ত বহুবিধ ধর্ম উপলব্ধি হইবে।

চিত্র ২৭৪

(ক) AII_1, BII_2, CII_3, I_2AI_3, I_3BI_1, I_1CI_2, প্রত্যেকেই সরলরেখা।

(খ) $\triangle I_1BC$, $\triangle I_2CA$, $\triangle I_3AB$ এবং $\triangle I_1I_2I_3$ পরস্পর সদৃশকোণী।

(গ) I_1A, I_2B, I_3C যথাক্রমে I_2I_3, I_3I_1, I_1I_2র উপর লম্ব।

(ঘ) I, $\triangle I_1I_2I_3$র লম্ববিন্দু, এবং $\triangle ABC$ উহার পাদত্রিভুজ।

(ঙ) I, I_1, I_2 I_3 এই চারিটি বিন্দুর যে কোন তিনটি সংযোগে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন হয়, চতুর্থ বিন্দুটি সেই ত্রিভুজের লম্ববিন্দু।

(চ) I, I_1, I_2, I_3 এই চারিটি বিন্দুর যে কোন তিনটি দ্বারা যে সব ত্রিভুজ অঙ্কিত হইবে তাহাদের পরিবৃত্তগুলি সর্বসম।

অনুশীলনী ৬৩

১। ত্রিভুজের ভূমি, শিরঃকোণ, এবং ভূমির স্পর্শক অন্তর্বৃত্তের স্পর্শবিন্দু প্রদত্ত আছে; ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

২। ত্রিভুজের ভূমি. শিরঃকোণ এবং ভূমির স্পর্শক বহির্বৃত্তের স্পর্শবিন্দু প্রদত্ত আছে; ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

৩। কোন ত্রিভুজের তিনটি বহিঃকেন্দ্রের অবস্থান প্রদত্ত আছে; ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

৪। কোন ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র ও দুইটি বহিঃকেন্দ্র প্রদত্ত আছে; ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

৫। কোন ত্রিভুজের পরিসীমা, শিরঃকোণ ও অন্তর্বৃত্তের ব্যাসার্ধ প্রদত্ত আছে; ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

৬। যদি কোন ত্রিভুজের একটি বাহু ও তদ্বিপরীত কোণ ধ্রুবক হয় তবে পাদত্রিভুজেরও একটি বাহু ও একটি কোণ ধ্রুবক হইবে।

৭। যে সকল ত্রিভুজের একই লম্ববিন্দু এবং একই পরিবৃত্ত, তাহাদের একই নববিন্দুবৃত্ত হইবে।

৮। কোন ত্রিভুজের তিনটি পাদবিন্দুর অবস্থান প্রদত্ত আছে; ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

৯। কোন ত্রিভুজের একটি শীর্ষবিন্দু, পরিকেন্দ্র ও লম্বকেন্দ্রের অবস্থান প্রদত্ত আছে; ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

১০। কোন ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র, অন্তঃকেন্দ্র ও একটি বহিঃকেন্দ্র—এই বিন্দুত্রয়ের অবস্থান প্রদত্ত আছে; ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

১১। কোন ত্রিভুজের শিরঃকোণ, উচ্চতা ও অন্তর্বৃত্তের ব্যাসার্ধ প্রদত্ত আছে; ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

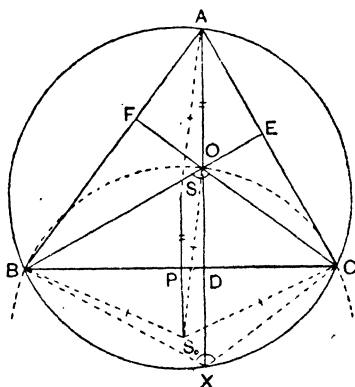
কয়েকটি বিশেষ বিন্দুর সঞ্চারপথ

৮৯। পূর্বে দেখিয়াছি (৩৫. উপপাদ্যের অনুসিদ্ধান্ত দ্রষ্টব্য) যে কোন ত্রিভুজের ভূমি BC ও শিরঃকোণ A নির্দিষ্ট থাকিলে উহার **পরিকেন্দ্র Sএর কোন সঞ্চারপথ থাকিতে পারে না**। কিন্তু, উক্ত ত্রিভুজের লম্ববিন্দু, অন্তঃকেন্দ্র, বহিঃকেন্দ্র, ভরকেন্দ্র, প্রভৃতির সঞ্চারপথ বিভিন্ন বৃত্ত ; এবং B, C, S নির্দিষ্ট থাকায় উক্ত সঞ্চারপথগুলির বিভিন্ন কেন্দ্র, ভূমির লম্বদ্বিখণ্ডকের উপর কোথাও না কোথাও থাকিবে। এই প্রসঙ্গে ঐ ঐ বিষয়ক উপপাদ্যগুলি আলোচিত হইবে।

১। **লম্ববিন্দুর সঞ্চারপথ**

কোন ত্রিভুজের ভূমি ও শিরঃকোণ নির্দিষ্ট থাকিলে উহার লম্ববিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় করিতে হইবে।

[Given the base and the vertical angle of a triangle ; to find the locus of its ortho-centre.]

চিত্র ২৭৫

ধর, ভূমি BC ও শিরঃকোণ A জানা আছে। অতএব, ABC ত্রিভুজের ন্যায় যাবতীয় ত্রিভুজের পরিবৃত্ত ও পরিকেন্দ্র S স্থির আছে। O, $\triangle$ABCর লম্ববিন্দু হইলে উহার সঞ্চারপথ নির্ণয় করিতে হইবে।

$\because$ $\angle BOC = \angle EOF = 180° - \angle A$ (AEOF বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ);

∴ BOC কোণের পরিমাণটি নির্দিষ্ট।

∴ B, O, C বিন্দুত্রয়ের পরিবৃত্তটির BOC বৃত্তচাপ লম্ববিন্দুর সঞ্চারপথ হইবে।

এখন, এই সঞ্চারপথ বৃত্তটি, ABCর পরিবৃত্তের সহিত সর্বসম [(ক) উপ. ৩ ও ৪ অনু.] হওয়ায় উভয় বৃত্তের কেন্দ্রসংযোজক রেখা BC দ্বারা লম্বদ্বিখণ্ডিত হইবে; অর্থাৎ, যদি S, △ABCর পরিকেন্দ্র হয় এবং S_0, △BOCর পরিকেন্দ্র হয়, তবে $S_0P = SP$ হইবে।

পুনশ্চ, $SP = \frac{1}{2}AO$ হওয়ায় [(খ) উপপাদ্য] $SS_0 = AO$, এবং উহারা পরস্পর সমান্তরাল হওয়ায় ASS_0O একটি সামান্তরিক হইল। সুতরাং, Oএর সঞ্চারপথ বৃত্তটির ব্যাসার্ধ $= S_0O = SA =$ △ABCর পরিব্যাসার্ধ R। (OBC, ABC ত্রিভুজদ্বয়ের পরিবৃত্ত সর্বসম হওয়ায় ইহা পূর্বেই সুস্পষ্ট জানা গিয়াছে)।

২। অন্তঃকেন্দ্রের সঞ্চারপথ

কোন ত্রিভুজের ভূমি ও শিরঃকোণ নির্দিষ্ট থাকিলে উহার অন্তঃকেন্দ্রের সঞ্চারপথ নির্ণয় করিতে হইবে।

[Given the base and the vertical angle of a triangle; to find the locus of its in-centre.]

চিত্র ২৭৬

$\angle BIC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A$; অতএব, ইহা একটি নির্দিষ্ট কোণ।

∴ অন্তঃকেন্দ্র I এর সঞ্চারপথ BC দ্বারা খণ্ডিত BIC বৃত্তচাপ হইবে, ইহার কেন্দ্র BCর লম্বদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত।

ধর, লম্বদ্বিখণ্ডকটি পরিবৃত্তকে S_i বিন্দুতে ছেদ করিল।

অন্তঃকেন্দ্রের সঞ্চারপথ যে বৃত্ত তাহার কেন্দ্র S_i হইবে। (প্রমাণ কর)

৩। বহিঃকেন্দ্রের সঞ্চারপথ

কোন ত্রিভুজের ভূমি ও শিরঃকোণ নির্দিষ্ট থাকিলে উহার বহিঃ-কেন্দ্রের সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

[Given the base and the vertical angle of a triangle; to find the locus of its ex-centre.]

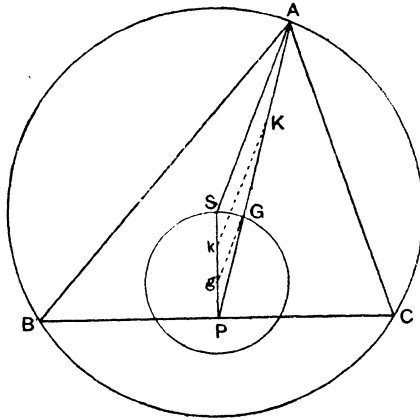
(চিত্র ২৭৬ দ্রষ্টব্য)

$\angle BI_1C = 90° - \frac{1}{2}\angle A =$ ধ্রুবক এবং BC নির্দিষ্ট।

সুতরাং, I_1 এর সঞ্চারপথ BI_1C বৃত্তচাপ হইবে। (উক্ত চাপের কেন্দ্র নির্ণয় কর)।

৪। ভরকেন্দ্রের সঞ্চারপথ

কোন ত্রিভুজের ভূমি ও শিরঃকোণ নির্দিষ্ট থাকিলে উহার ভরকেন্দ্রের সঞ্চারপথ নির্ণয় করিতে হইবে।

[Given the base and the vertical angle of a triangle; to find the locus of the centroid.]

চিত্র ২৭৭

$\triangle ABC$র BC ও $\angle A$ নির্দিষ্ট আছে। S, উহার পরিকেন্দ্র; G উহার ভরকেন্দ্র; এবং P, BCর মধ্যবিন্দু।

G এর সঞ্চারপথ নির্ণয় করিতে হইবে।

AP, SP, AS যোগ কর।

$\because$ G ভরকেন্দ্র, $\therefore$ $PG = \frac{1}{3}PA$।

AGর মধ্যবিন্দু K লও; এবং ASএর ∥ করিয়া Gg, Kk টান।

$\because$ Gg, Kk, AS পরস্পর সমান্তরাল, এবং $PG = GK = KA$,

$\therefore$ $Pg = gk = kS$; অর্থাৎ $Pg = \frac{1}{3}PS$।

পুনশ্চ, $Gg = \frac{1}{2}Kk = \frac{1}{3}AS = \frac{1}{3}$ R (পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ)।

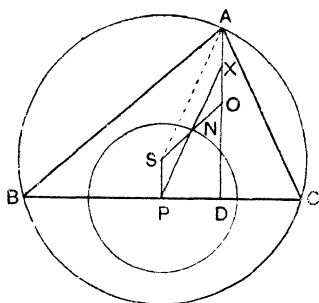
এখন, BC নির্দিষ্ট থাকায় উহার লম্বদ্বিখণ্ডক SP স্থির।

$\therefore$ g বিন্দুটি স্থির।

অতএব, gকে কেন্দ্র করিয়া এবং gG বা $\frac{1}{3}$ Rব্যাসার্ধ লইয়া যে বৃত্তটি অঙ্কিত হইবে উহার BC দ্বারা কর্তিত চাপটিই ভরকেন্দ্রের সঞ্চারপথ।

৫। নববিন্দুকেন্দ্রের সঞ্চারপথ

কোন ত্রিভুজের ভূমি ও শিরঃকোণ নির্দিষ্ট থাকিলে উহার নববিন্দু-কেন্দ্রের সঞ্চারপথ নির্ণয় করিতে হইবে।

[Given the base and the vertical angle of a triangle ; to find the locus of its nine-point centre.]

চিত্র ২৭৮

$\triangle$ABCর BC ও $\angle$A নির্দিষ্ট আছে। S, উহার পরিকেন্দ্র; O, উহার লম্ববিন্দু; P, BCর মধ্যবিন্দু; এবং OS এর মধ্যবিন্দু N, নববিন্দু-বৃত্তের কেন্দ্র।

Nএর সঞ্চারপথ নির্ণয় করিতে হইবে।

∵ $NP = NX = \frac{1}{2} XP = \frac{1}{2} AS = \frac{1}{2} R$;

এবং, ∵ P নির্দিষ্ট বিন্দু, (নির্দিষ্ট ভূমির মধ্যবিন্দু)

∴ Pকে কেন্দ্র করিয়া, $\frac{1}{2}$ R অর্থাৎ PN ব্যাসার্ধ লইয়া যে বৃত্ত অঙ্কিত হইবে তাহার BC দ্বারা কর্তিত চাপ Nএর সঞ্চারপথ হইবে।

মন্তব্য। উপরি উক্ত পাঁচটি প্রতিপাদ্যের প্রত্যেক স্থলে সঞ্চারপথের বৃত্তের কেন্দ্রটি SPর কোথাও না কোথাও থাকিবে।

অনুশীলনী ৬৪

১। বহিঃস্থ কোন স্থির বিন্দু হইতে এককেন্দ্রীয় বৃত্তশ্রেণীতে যে সকল স্পর্শক অঙ্কিত করা যায় তাহাদের স্পর্শবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

২। কোন বৃত্তস্থ দুইটি স্থির বিন্দুগামী দুইটি সরলরেখা সর্বাবস্থায় বৃত্ত হইতে সমদীর্ঘ চাপ ছেদ করে। রেখা দুইটির পরস্পর ছেদবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

৩। একটি ত্রিভুজের ভূমি ও শিরঃকোণ উভয়েই ধ্রুবক। ত্রিভুজের তিনটি বহিঃকেন্দ্রগামী বৃত্তের কেন্দ্রের সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

৪। ABC ত্রিভুজের ভূমি BC এবং শিরঃকোণ A ধ্রুবক। ইহার যে বহিঃবৃত্ত ABকে স্পর্শ করে তাহার কেন্দ্রের সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

৫। BAC ত্রিভুজের ভূমি BC এবং শিরঃকোণ A স্থির। CA কে P বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত কর যেন $CP = BA + AC$ হয়। P বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

৬। কোন ত্রিভুজের ভূমি ও শিরঃকোণ প্রদত্ত থাকিলে ইহার নববিন্দুবৃত্ত পরিবৃত্তের সমান আর একটি বৃত্তকে স্পর্শ করিবে।

বিবিধ অনুশীলনী (২)

ক

১। AB কোন বৃত্তের একটি নির্দিষ্ট জ্যা। যে কোন ব্যাসের প্রান্তদ্বয় হইতে ABর উপর লম্ব টানিলে তাহাদের দৈর্ঘ্যের সমষ্টি (কিংবা অন্তর) ফল একটি নির্দিষ্ট পরিমাণ হইবে।

২। △ABCর অন্তর্বৃত্ত BC বাহুকে D বিন্দুতে স্পর্শ করে, প্রমাণ কর AB+CD = ত্রিভুজের অর্ধপরিসীমা।

৩। যদি কোন ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র ও পরিকেন্দ্র-সংযোজক রেখা একটি শীর্ষবিন্দু অতিক্রম করিয়া যায়, প্রমাণ কর যে সেই শীর্ষকোণের পার্শ্ববাহু দুইটি পরস্পর সমান।

৪। কোন ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র ও পরিকেন্দ্র সমাপতিত হইলে ত্রিভুজটি সমবাহু ত্রিভুজ হইবে।

৫। কোন ABCD চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় O বিন্দুতে ছেদ করিলে, △AOB, △BOC, △COD, △DOA এই চারিটি ত্রিভুজের পরিকেন্দ্রগুলি কোন সামান্তরিকের চারি শীর্ষবিন্দু হইবে।

৬। কোন ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র ও পরিকেন্দ্র-সংযোজক রেখা কোন শীর্ষবিন্দুতে যে সংমুখকোণ উৎপন্ন করে তাহার পরিমাণ, অপর শীর্ষকোণের অন্তরফলের অর্ধেক।

৭। দুইটি বহিঃস্পর্শী বৃত্তের সরল সাধারণ স্পর্শকদ্বয়, কেন্দ্র-সংযোজক রেখাকে ব্যাস করিয়া অঙ্কিত বৃত্তকেও স্পর্শ করে।

৮। যদি I, △ABCর অন্তঃকেন্দ্র হয়, এবং I_1, উহার একটি বহিঃকেন্দ্র (যে বহির্বৃত্তটি BC বাহুকে স্পর্শ করিয়াছে তাহার) হয়, প্রমাণ কর IBI_1C চতুর্ভুজটি বৃত্তস্থ।

৯। O, ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র, প্রমাণ কর যে ∠Aর দ্বিখণ্ডক এবং O হইতে BCর উপর লম্বটি পরিকেন্দ্রে মিলিত হইবে।

১০। যে কোন চতুর্ভুজের শীর্ষকোণের দ্বিখণ্ডকগুলি মিলিত হইয়া যে চতুর্ভুজ উৎপন্ন করে তাহা বৃত্তস্থ হইবে।

[Prove that the internal bisectors of the angles of a quadrilateral form a cyclic quadrilateral.]

খ

১১। AB, CD কোন বৃত্তের (কেন্দ্র O) দুইটি জ্যা, P অন্তঃ বিন্দুতে সমকোণে নত। প্রমাণ কর ∠AOD + ∠BOC = 2 সমকোণ।

১২। AB দুইটি বৃত্তের সাধারণ জ্যা; উহাদের সাধারণ স্পর্শক X, Yতে উহাদিগকে স্পর্শ করিয়াছে। প্রমাণ কর ∠XAY + ∠XBY = 2সমকোণ।

১৩। P, Q দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং R এরূপ একটি বিন্দু যে P হইতে QRএর উপর লম্ব টানিলে তাহা QRকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। প্রমাণ কর যে R এর সঞ্চারপথ একটি বৃত্ত।

১৪। কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে যত রেখা একটি নির্দিষ্ট বৃত্তের উপর টানা যায় তাহাদের মধ্য-বিন্দুর সঞ্চারপথ একটি বৃত্ত।

১৫। কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে একটি নির্দিষ্ট সীমাহীন রেখার উপর যত রেখা টানা যাইবে তাহাদের মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ কি?

১৬। একই অতিভুজের উপর যত সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কিত করা যাইবে তাহাদের অন্তঃকেন্দ্রের সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

১৭। BC ভুমির উপর ABC ত্রিভুজ অঙ্কিত হইল যেন AC, B বিন্দু হইতে ACর উপর লম্বের দৈর্ঘ্য হয়; শিরঃকোণ Aর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

১৮। OP, OQ রেখাদ্বয় পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত, PQ রেখা নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্য বজায় রাখিয়া উক্ত রেখাদ্বয়ের মধ্যে গড়াইয়া যাইতে পারে। PQ এর যে কোন সংস্থিতিতে PX, OP এর লম্ব, এবং QX, OQ এর লম্ব টানা হইল। X-বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

১৯। কোন ত্রিভুজের শিরঃকোণ ও তাহার পার্শ্বস্থ রেখাদ্বয়ের সমষ্টি নির্দিষ্ট আছে। ত্রিভুজের পরিকেন্দ্রের সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

২০। কোন রম্বসের একটি ভুজের যদি দৈর্ঘ্য ও অবস্থান নির্দিষ্ট থাকে তবে উহার কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

গ

২১। কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে কতকগুলি এককেন্দ্রীয় বৃত্তের উপর যে সব স্পর্শক টানা যাইবে তাহাদের স্পর্শবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

২২। দুইটি নির্দিষ্ট রেখা AB, CD র উপর যথাক্রমে P ও Q বিন্দু লওয়া হইল যেন $AP+AQ=$ নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্য হয়। প্রমাণ কর যে PAQ বৃত্তটি অপর একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যাইবে।

২৩। দুইটি সমান বৃত্ত A বিন্দুতে বহিঃস্পর্শ করিয়াছে। A হইতে AE, AF দুইটি জ্যা দুইটি বৃত্তে এরূপভাবে টানা গেল যে $\angle EAF=$ একটি সমকোণ। প্রমাণ কর যে F, E যোগ করিয়া যে সরলরেখা হইল তাহার দৈর্ঘ্য উক্ত বৃত্তদ্বয়ের যে কোনটির ব্যাসের সমান।

২৪। দুইটি নির্দিষ্ট বৃত্ত পরস্পর বহিঃস্পর্শ করিয়াছে; একটি তৃতীয় বৃত্ত উভয়কে অন্তঃস্পর্শ করিয়া টানা হইল। তিনটি বৃত্তের কেন্দ্র সংযুক্ত করিয়া যে ত্রিভুজ অঙ্কিত হইবে তাহার পরিসীমা, তৃতীয় বৃত্তের ব্যাসের সহিত সমান হইবে প্রমাণ কর।

২৫। যদি দুই বৃত্ত স্পর্শ করে তবে উভয় বৃত্তে অঙ্কিত দুই সমান্তরাল জ্যার প্রান্তবিন্দুগুলি এবং বৃত্তদ্বয়ের স্পর্শবিন্দু এক রেখায় থাকিবে।

২৬। ΔABCর $\angle A$ = এক সমকোণ। প্রমাণ কর যদি d অন্তর্লিখিত বৃত্তের ব্যাস হয় তবে, $BC + d = BA + AC$ হইবে।

[The hypotenuse of a right angled triangle is less than the sum of the other two sides by the diameter of the in-circle.

২৭। কোন স্থির বিন্দু A হইতে কোন বৃত্তে (কেন্দ্র O) AD, AF স্পর্শকদ্বয় টানা হইল। যে কোন তৃতীয় স্পর্শক PQ AD, AFকে যথাক্রমে P, Q বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে $\angle POQ$ একটি নির্দিষ্ট কোণ।

২৮। দুইটি জ্যা AB, CD কোন বৃত্তের অন্তঃস্থ হইয়া E বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে; প্রমাণ কর যে উহাদের অন্তর্ভুক্ত কোণটি, ছেদিত চাপদ্বয় কেন্দ্রে যে সংমুখ কোণ উৎপন্ন করিবে তাহার অর্ধেক হইবে।

২৯। দুইটি বৃত্ত A বিন্দুতে অন্তঃস্পর্শ করিয়াছে; একটি সরল রেখা বৃহত্তর বৃত্তকে B, C বিন্দুতে ও ক্ষুদ্রতর বৃত্তকে D, E বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে, BD ও EC অংশদ্বয় A বিন্দুতে সমান সংমুখ কোণ উৎপন্ন করিবে।

৩০। দুইটি বৃত্ত A ও B বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। A বিন্দুতে উভয় বৃত্তের স্পর্শক টানা হইল এবং তাহারা পরিধিগুলিতে C ও D বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর

(ক) CB, BD সমরেখ; (খ) ABC, ABD ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী।

ঘ

৩১। তিনটি বৃত্ত (যাহাদের কেন্দ্র A, B, C) পরস্পর বহিঃ স্পর্শ করিয়াছে; স্পর্শবিন্দুগুলি যথাক্রমে D, E, F: প্রমাণ কর যে, ABC ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্ত ও DEF ত্রিভুজের বহির্বৃত্ত একই।

৩২। A, B, C, D চারিটি বিন্দু কোন বৃত্তের পরিধির উপর ক্রমিকভাবে লওয়া হইল AB, DCর বর্ধিতাংশদ্বয় P বিন্দুতে ছেদ করিলে এবং AD, BC, Q বিন্দুতে ছেদ করিলে, প্রমাণ কর যে, $\angle APC$ ও $\angle AQC$র দ্বিখণ্ডক দুইটি পরস্পর সমকোণ নত হইবে।

৩৩। ABC ত্রিভুজের লম্ববিন্দু O, এবং BOCD সামান্তরিকটি পূর্ণরূপে অঙ্কন করা হইল। প্রমাণ কর যে AD, ΔABCর পরিবৃত্তটির ব্যাস হইবে।

৩৪। ΔABC র, BC, CA, AB ভুজগুলির উপর যথাক্রমে ইচ্ছানুরূপ X, Y, Z বিন্দু লওয়া হইল। প্রমাণ কর যে, AYZ, BZX, CXY, ত্রিভুজগুলির পরিকেন্দ্রত্রয় সমবিন্দু।

সঙ্কেত। ধর, AYZ, BZX বৃত্তদ্বয় O বিন্দুতে ছেদ করিল; প্রমাণ কর CXOY একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

৩৫। ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তের উপর X বিন্দু লও; XM, XN যথাক্রমে CA, AB র উপর লম্ব। ধর, MN (বা উহার বর্ধিতাংশ), BCকে L বিন্দুতে ছেদ করিল। XL, XA, XB যোগ কর। প্রমাণ কর

$\angle XLN = \angle XAC = \angle XBL$ (অথবা, = ইহার সম্পূরককোণ, যদি X, AB চাপের উপর থাকে)।

অতঃপর প্রমাণ কর XNBL বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ, এবং XL, BCর উপর লম্ব।

৩৬। দুইটি নির্দিষ্ট বৃত্তের BD, CE তির্যক সাধারণ স্পর্শকদ্বয়, এবং AF একটি সরল সাধারণ স্পর্শক। প্রমাণ কর যে BD ও CEর মধ্যবর্ত্তী AF এর অংশটি, BDর সহিত সমান।

৩৭। কোন বৃত্তের অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় পরস্পর লম্ব; এবং তাহাদের ছেদবিন্দু হইতে যে কোন বাহুর উপর একটি লম্ব টানা গেল। প্রমাণ কর যে, লম্বটি বর্ধিত হইলে চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুকে দ্বিখণ্ডিত করিবে।

৩৮। দুইটি সমান বৃত্ত A বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে; দ্বিগুণ ব্যাসার্ধের একটি বৃত্ত, উহাদের একটিকে B বিন্দুতে অন্তঃস্পর্শ করিবে এরূপভাবে টানা হইল; ধর, ইহা অপর বৃত্তকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে A ও B সংযোজক রেখা P (বা Q) বিন্দুকে অতিক্রম করিয়া যাইবে।

৩৯। A বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া ও AB ব্যাসার্ধ লইয়া যে বৃত্ত অঙ্কিত হইল তাহা ABCD আয়তক্ষেত্রের পরিবৃত্তকে E বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর

(ক) $CE = AD$;

(খ) $DE \parallel AC$।

৪০। কোন ত্রিভুজের BC বাহুকে একটি বৃত্ত D বিন্দুতে স্পর্শ করিল এবং অপর বাহুর AB, ACর বর্ধিতাংশ যথাক্রমে F, E বিন্দুতে স্পর্শ করিল। যদি I অন্তঃকেন্দ্র হয়, তবে ক্ষেত্র IAE = ক্ষেত্র IAF = $\frac{1}{2}$ ক্ষেত্র ABC হইবে।

ঙ

৪১। B বিন্দু, AX, AY এর অন্তর্ভূত কোণের দ্বিখণ্ডকস্থ। A, B দিয়া যে কোন বৃত্ত অঙ্কিত হইলে উহা AX, AY কে যথাক্রমে P, Q বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর $AP + AQ$ = একটি নির্দিষ্ট মান।

সঙ্কেত। যদি BR, BS যথাক্রমে AX, AY এর উপর লম্ব হয়, প্রমাণ কর $PR = QS$।

৪২। ABC ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্তটি BC কে D বিন্দুতে স্পর্শ করিল। প্রমাণ কর যে BAD, CAD ত্রিভুজদ্বয়ের অন্তর্বৃত্তদ্বয় পরস্পর স্পর্শ করিবে।

৪৩। দুইটি অসমান বৃত্তের A বিন্দুতে বহিঃস্পর্শ ঘটিয়াছে। BC বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ স্পর্শক এবং B ও C দুইটি স্পর্শ বিন্দু। BQ এবং CP বৃত্তদ্বয়ের দুইটি ব্যাস। প্রমাণ কর BP ও QC A বিন্দুতে পরস্পর সমকোণে ছিন্ন হইবে।

৪৪। ABC একটি বৃত্তের অন্তর্লিখিত ত্রিভুজ। B ও C বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শক দুইটি O বিন্দুতে ছেদ করে। O বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এবং OC ব্যাসার্ধ ধরিয়া অঙ্কিত বৃত্ত বর্ধিত ACকে Q বিন্দুতে ছেদ করে। যদি QO, ABকে R বিন্দুতে ছেদ করে, তবে Q, C, B, R বৃত্তস্থ হইবে।

৪৫। সমবাহু ত্রিভুজের প্রত্যেকটি বাহুর মধ্যবিন্দুগামী পরিব্যাসার্ধ ঐ বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

[Each side of an equilateral triangle bisects the circum-radius through its middle point.]

৪৬। প্রমাণ কর যে কোন বৃত্তের যে কোন ব্যাসার্ধের মধ্যবিন্দুর ভিতর দিয়া অঙ্কিত ক্ষুদ্রতম জ্যাটিই বৃত্তের অন্তর্লিখিত সমবাহু ত্রিভুজের একটি বাহু হইবে।

[Prove that the least chord that bisects a radius of a circle is the side of an inscribed equilateral triangle,]

৪৭। একটি 4 ইঞ্চি দীর্ঘ সরলরেখাকে ব্যাস ধরিয়া একটি অর্ধবৃত্ত অঙ্কন কর; এবং ·5″ ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি বৃত্ত অন্তর্লিখিত কর। শেষোক্ত বৃত্তের ব্যাস কত ইঞ্চি পর্যন্ত হইতে পারে?

৪৮। ABC ত্রিভুজের $\angle A$এর অন্তর্দ্বিখণ্ডক পরিবৃত্তকে D বিন্দুতে ছেদ করে। DE ও DF যথাক্রমে AB ও ACর উপর লম্ব। প্রমাণ কর $2AE = AB + AC$.

৪৯। PQRS একটি বর্গক্ষেত্র। Q ও Rকে কেন্দ্র করিয়া এবং PQ ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্তদ্বয় বর্গক্ষেত্রটির ভিতরে A বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করে। প্রমাণ কর যে $\angle QSA = 30°$।

৫০। একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহুর উপর বাহিরের দিকে তিনটি সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত হইল। এই ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি যথাক্রমে সমবাহু ত্রিভুজগুলির বিপরীত শীর্ষবিন্দুগুলির সহিত যুক্ত করিলে যে তিনটি রেখা হয় তাহারা সমবিন্দু হইবে।

আরও প্রমাণ কর যে, এই সমবাহু ত্রিভুজগুলির পরিকেন্দ্র তিনটি একটি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষ বিন্দু হইবে।

—চতুর্থ খণ্ড—

প্রথম অধ্যায়

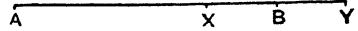
আয়ত ও বর্গক্ষেত্র—সংজ্ঞা

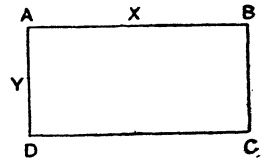
৯০। এই খণ্ডে বীজগণিতের কয়েকটি অভেদ (identity) জ্যামিতিক ক্ষেত্রফল বিচারে প্রতিপন্ন করা হইবে ; অতঃপর, বৃত্ত সম্পর্কে আয়ত ও বর্গক্ষেত্র বিষয়ক প্রয়োজনীয় উপপাদ্য প্রতিষ্ঠিত করিয়া বৃত্তাঙ্কন সাহায্যে ক্ষেত্রবিষয়ক সম্পাদ্য প্রদর্শিত হইবে, এবং সর্বশেষভাগে বিবিধ সর্ত পূরণকারী বৃত্তসমূহের অঙ্কন কার্য সম্পাদিত হইবে।

৯১। **সংজ্ঞা**

যদি কোন সরলরেখা ABর উপর একটি বিন্দু X লওয়া হয়, বা উহাকে বর্ধিত করিয়া তদুপরি অপর একটি বিন্দু Y লওয়া হয়, তবে X (বা Y), ABকে দুইটি অংশে (segments) বিভক্ত করে।

A X B Y

চিত্র ২৭৯

এ স্থলে, AB রেখাটি X বিন্দু দ্বারা **অন্তর্বিভক্ত** (divided internally), বা Y বিন্দু দ্বারা **বহির্বিভক্ত** (divided externally) হইয়াছে বলা হয়। X বিন্দুটিকে **অন্তর্ভাগবিন্দু** (point of internal division) ও Y বিন্দুটিকে **বহির্ভাগবিন্দু** (point of external division) বলা হয়। অন্তর্বিভক্ত হইলে AB রেখাটির দৈর্ঘ্য AX, XB অংশদ্বয়ের সমষ্টিফল হইবে, এবং বহির্বিভক্ত হইলে ABর দৈর্ঘ্য, AY, YB অংশদ্বয়ের অন্তরফল হইবে ; অর্থাৎ, (ক) $AX + XB = AB$; (খ) $AY - YB = AB$।

ABCD (পার্শ্বচিত্র) একটি আয়তক্ষেত্র। ক্ষেত্রটিকে ইহার সন্নিহিত বাহুদ্বয়ের গুণফল দ্বারা বুঝান হয় ; যথা ABCD ক্ষেত্রকে 'AB. CD ক্ষেত্র' অথবা 'AB, CD ক্ষেত্র' বলিতে হইবে। সংক্ষেপতঃ, AB ও ADর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে X ও

Y হইলে, ক্ষেত্রটি 'X.Y ক্ষেত্র' এইরূপেও প্রকাশ করা চলে। অনুরূপে, ABCD যদি একটি বর্গ ক্ষেত্র হয় তবে উহাকে AB^2, বা $X=Y$ হওয়ায়, X^2, বলিতে হইবে। কখনও কখনও কোন আয়ত বা বর্গক্ষেত্রকে তাহাদের যে কোন একটি কর্ণদ্বারাও সূচিত করা হয় ; যথা, BD (বা AC) আয়তক্ষেত্র, বলিলে আয়তক্ষেত্র ABCDকে বুঝাইবে।

৯২। নিম্নে বীজগণিতের কয়েকটি **অভেদ** (identity) দেওয়া হইল, উহা পরবর্ত্তী কয়েকটি উপপাদ্যে জ্যামিতির অঙ্কন সাহায্যে প্রমাণিত হইবে :—

(ক) $\mathbf{k(a+b+c+\cdots) = ka+kb+kc+\cdots\cdots}$

(খ) $\mathbf{(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2}$

(গ) $\mathbf{(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2}$

(ঘ) $\mathbf{(a+b)(a-b) = a^2-b^2}$

দ্রষ্টব্য। **ka** এই বীজগণিতের রাশিটি **k** ও **a** এর গুণফল ; একটি আয়তক্ষেত্রের সন্নিহিত বাহুদ্বয় যদি যথাক্রমে **k** ও **a** একক হয়, তবে ইহার ক্ষেত্রফল **ka** এই গুণফলদ্বারা প্রকাশিত হয় ; সুতরাং একটি আয়তক্ষেত্র যাহার সন্নিহিত দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য **k** ও **a**, তাহা দ্বারাই বীজগণিতের **'ka'** রাশিটি প্রকাশিত হইবে। এইরূপ, একটি আয়তক্ষেত্র যাহার সন্নিহিত বাহুদ্বয় $\mathbf{a+b}$ ও $\mathbf{a-b}$ তাহা দ্বারাই $\mathbf{(a+b)(a-b)}$ প্রদর্শিত হইবে।

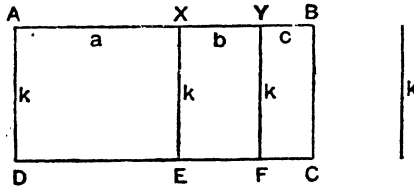
দ্বিতীয় অধ্যায়

বৈজিক অভেদের প্রতিসূত্র

উপপাদ্য ৪৮ (Theorem 48)

দুইটি সরলরেখার একটি কতিপয় অংশে বিভক্ত হইলে রেখা দুইটির অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র, অবিভক্তরেখা ও বিভক্তরেখার প্রত্যেক অংশের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রগুলির সমষ্টির সমান।

(If, of two straight lines, one is divided into any number of parts, the rectangle contained by the two lines is equal to the sum of the rectangles contained by the undivided line and the several parts of the divided line.)

অনুরূপ বীজগণিত সূত্র : $\mathbf{k(a+b+c+\cdots)=ka+kb+kc+\cdots}$ ।

চিত্র ২৮১

AB ও K দুইটি নির্দিষ্ট সরলরেখা ; ধর AB রেখা AX, XY, YB এই তিন অংশে বিভক্ত হইয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে

$$K.AB = K.AX + K.XY + K.YB \text{ ।}$$

অঙ্কন। A বিন্দুতে K এর দৈর্ঘ্য পরিমাণ AD লম্ব অঙ্কন কর, এবং AB, AD সন্নিহিত বাহুদ্বয় লইয়া আয়তক্ষেত্র ABCD সম্পূর্ণ কর।

X ও Y বিন্দুদ্বয়ে ADর সমান্তরাল রেখাদ্বয় যথাক্রমে XE, YF অঙ্কিত কর; মনে কর, ইহারা DC কে যথাক্রমে E ও F বিন্দুতে ছেদ করিল। তাহা হইলে

AD = XE = YF = BC = K হইবে।

প্রমাণ। আয়তক্ষেত্র AC = ক্ষেত্র AE + ক্ষেত্র XF + ক্ষেত্র YC ;

কিন্তু, ক্ষেত্র AC = AD.AB = K.AB,

ক্ষেত্র AE = AD.AX = K.AX,

ক্ষেত্র XF = AD.XY = K.XY,

ক্ষেত্র YC = AD.YB = K.YB,

∴ K.AB = K.AX + K.XY + K.YB।

এক্ষণে, যদি K, AX, XY, YBএর মান কোন নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের একক হিসাবে যথাক্রমে k, a, b, c হয় তবে ABর দৈর্ঘ্য $= a+b+c$, এবং

K.AB $= k(a+b+c)$ বর্গ একক,

K.AX $= ka$ বর্গ একক,

K XY $= kb$ বর্গ একক,

K.YB $= kc$ বর্গ একক,

অর্থাৎ, $\mathbf{k(a+b+c) = ka+kb+kc}$।

অনু. ১। কোন সরলরেখা অন্তঃস্থভাবে মাত্র দুই অংশে বিভক্ত হইলে সমগ্র সরলরেখার উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র, সমগ্র রেখা ও উভয় অংশের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র দুইটির সমষ্টির সমান হইবে।

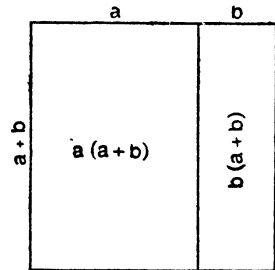
[If a straight line is divided into any two parts, the square on the whole line is equal to the sum of the rectangles contained by the whole line and each of the parts.]

কারণ,

AD.AB = AD.AX + AD.XB ;

এবং AB = AD হইলে উহা এইরূপ হয়,

AB^2 = AB.AX + AB.XB ;

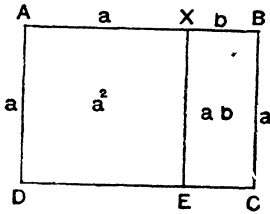
অর্থাৎ, $\mathbf{(a+b)^2 = a(a+b) + b(a+b)}$।

চিত্র ২৮২

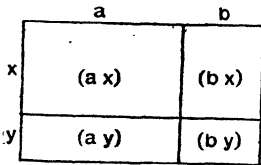
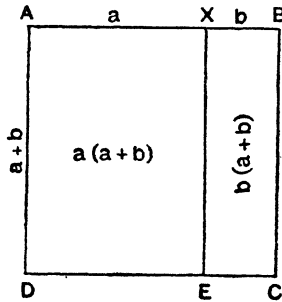
অনু. ২। কোন সরলরেখা অন্তঃস্থভাবে দুই অংশে বিভক্ত হইলে, সমগ্র সরলরেখা ও উহার একাংশের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র, উক্ত একাংশের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র এবং অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমষ্টির সমান।

[If a straight line is divided into any two parts, the rectangle contained by the whole line and one part is equal to the sum of the square on that part and the rectangle contained by the two parts.]

কারণ, $AD.AB = AD.AX + AD.XB$;

এবং, $AX = AD$ হইলে এইরূপ হয়, $AX.AB = AX^2 + AX.XB$;

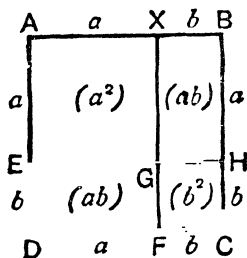
অর্থাৎ, $\mathbf{a(a+b) = a^2 + ab}$।

চিত্র ২৮৩

প্রশ্ন। নিম্নে দুইটি চিত্র দেওয়া হইল। চিত্রের বাহুগুলির অংশের দৈর্ঘ্য **a, b, x, y** দ্বারা চিহ্নিত; চিত্র দুইটি বীজগণিতের যে যে অভেদ প্রদর্শিত করিতেছে তাহা লিখ এবং তাহাদের জ্যামিতিক নির্বচন বল—

চিত্র ২৮৪

চিত্র ২৮৫

উপপাদ্য ৪৯ (Theorem 49)

কোন সীমাবদ্ধ সরলরেখা কোন বিন্দুতে অন্তর্বিভক্ত হইলে সমগ্র রেখার উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র, অংশদ্বয়ের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয় ও ঐ অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের দ্বিগুণের সমষ্টিফলের সমান।

[If a straight line divided *internally* into two parts, the square on the whole line is equal to the the sum of the squares on the two parts *together with* twice the rectangle contained by the parts.]

অনুরূপ বীজগণিত সূত্র : $(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 + 2\mathbf{ab} + \mathbf{b}^2$ ।

চিত্র ২৮৬

AB সরলরেখা X বিন্দুতে AX, XB অংশে অন্তর্বিভক্ত হইয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$AB^2 = AX^2 + XB^2 + 2AX.\ XB$$

অঙ্কন। ABর উপর ABCD বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর।

AD হইতে AE = AX কাটিয়া লও। তাহা হইলে ED = XB হইবে। E ও X বিন্দুদ্বয়ের মধ্য দিয়া EH ও XF যথাক্রমে AB ও ADর সমান্তরাল রেখা টান। মনে কর, ইহারা G বিন্দুতে এবং BC ও DC কে যথাক্রমে H ও F বিন্দুতে ছেদ করে। ইহাতে AC বর্গক্ষেত্রটি চারিটি ক্ষেত্রে বিভক্ত হইল, তন্মধ্যে AG ও GC বর্গক্ষেত্র এবং XH ও EF আয়তক্ষেত্র।

প্রমাণ। ক্ষেত্র AC = ক্ষেত্র AG + ক্ষেত্র XH + ক্ষেত্র EF + ক্ষেত্র GC।

কিন্তু, ক্ষেত্র AC $= AB^2$

ক্ষেত্র AG $= AX^2$,

ক্ষেত্র XH $= XG.\ XB = AX.\ XB$,

ক্ষেত্র EF $= EG.\ ED = AX.\ XB$,

ক্ষেত্র GC $= XB^2$।

সুতরাং, $AB^2 = AX^2 + AX.\ XB + AX.\ XB + XB^2$

$= AX^2 + 2AX.\ XB + XB^2$।

এখন, AX, XBর মান যদি যথাক্রমে a, b একক হয়, তবে AB $= a+b$ একক ; এবং $AB^2 = (a+b)^2$ বর্গ একক, $AX^2 = a^2$ বর্গ একক, $XB^2 = b^2$ বর্গ একক, $2\ AX.\ XB = 2ab$ বর্গ একক।

অর্থাৎ, $(\mathbf{a+b})^2 = \mathbf{a}^2 + 2\mathbf{ab} + \mathbf{b}^2$।

প্রশ্ন। পার্শ্বচিত্রটিতে একটি বর্গক্ষেত্রকে নয়টি ক্ষেত্রে বিভক্ত করা হইয়াছে, তন্মধ্যে ৬টি আয়ত ও ৩টি বর্গক্ষেত্র। প্রত্যেকটির বাহুর দৈর্ঘ্য **a, b, c** দ্বারা চিহ্নিত আছে। চিত্রটি বীজগণিতের যে অভেদটি সূচিত করে তাহা এবং তাহার জ্যামিতিক নির্বচন কি হইবে ?

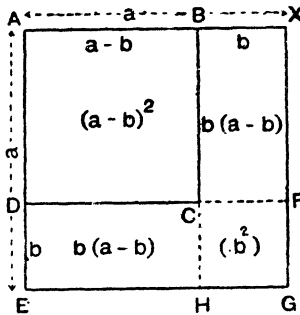
	a	b	c
c	(a c)	(b c)	(c^2)
b	(a b)	(b^2)	(b c)
a	(a^2)	(a b)	(a c)

চিত্র ২৮৭

উপপাদ্য ৫০ (Theorem 50)

কোন সরলরেখা কোন বিন্দুতে বহির্বিভক্ত হইলে ঐ রেখার উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র, অংশদ্বয়ের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টিফল হইতে ঐ অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের দ্বিগুণ মাত্রা অন্তর করিলে যে অন্তরফল হইবে তাহার সমান।

অনুরূপ বীজগণিত সূত্র : $(\mathbf{a}-\mathbf{b})^2=\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2-2\mathbf{ab}$।

[If a straight line is divided *externally* at any point, the square on the given line is equal to the sum of the squares on the two segments *diminished* by twice the rectangle contained by the segments.]

চিত্র ২৮৮

AB সরলরেখা X বিন্দুতে বহির্বিভক্ত হইয়া AX, XB হইয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$AB^2=AX^2+XB^2-2AX.XB\text{।}$$

অঙ্কন। AX ও ABর উপর যথাক্রমে AXGE, ABCD বর্গক্ষেত্রদ্বয় অঙ্কিত কর। তাহা হইলে, AE ও AD একই সরলরেখা হইবে। DC ও BCকে বর্ধিত কর ; ধর, ইহারা XG ও EGকে যথাক্রমে F ও H বিন্দুতে ছেদ করিল। তাহা হইলে

AX = DF = EG = BH এবং BX = CF = CH = DE হইবে ; এবং চিত্রটিতে CG বর্গক্ষেত্র, BF ও DH আয়তক্ষেত্র হইবে।

প্রমাণ।

ক্ষেত্র AC = ক্ষেত্র AG + ক্ষেত্র CG − ক্ষেত্র CG − ক্ষেত্র CE − ক্ষেত্র BG,

= ক্ষেত্র AG + ক্ষেত্র CG − (ক্ষেত্র CG + ক্ষেত্র CE) − ক্ষেত্র BG,

= ক্ষেত্র AG + ক্ষেত্র CG − ক্ষেত্র DG − ক্ষেত্র BG।

কিন্তু, ক্ষেত্র AC = AB^2 ; ক্ষেত্র AG = AX^2 ;

ক্ষেত্র CG = $CF^2 = XB^2$;

ক্ষেত্র DG = DF. DE = AX.XB ;

ক্ষেত্র BG = BX.BH = BX.AX।

সুতরাং, $AB^2 = AX^2 + XB^2 - AX.XB - XB.AX$

$= AX^2 + XB^2 - 2\ AX.XB$।

এখন, AX, XBর মান যদি যথাক্রমে a, b একক হয়, তবে

AB = $a - b$ একক এবং $AB^2 = (a-b)^2$ বর্গএকক,

$AX^2 = a^2$ বর্গ একক, $XB^2 = b^2$ বর্গ একক,

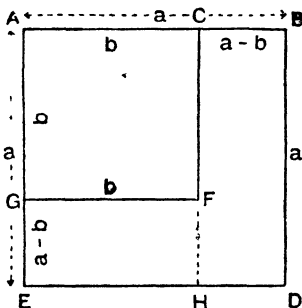
2 AX.XB = $2ab$ বর্গ একক।

অর্থাৎ, $(\mathbf{a}-\mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 - \mathbf{2ab}$।

উপপাদ্য ৫১ (Theorem 51)

যে কোন দুইটি সরলরেখার উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের অন্তরফল ঐ সরলরেখাদ্বয়ের সমষ্টি ও অন্তরেব অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমান।

অনুরূপ বীজগাণিত সূত্র : $\mathbf{a^2-b^2=(a+b)(a-b)}$।

[The difference of the squares on any two straight lines is equal to the rectangle contained by their sum and difference.]

চিত্র ২৮৯

মনে কর, AB, AC সবলরেখাদ্বয়েব AB > AC, এবং উহার একটি অপরটির উপর এরূপভাবে স্থাপিত হইল যে একটিব প্রান্ত অপরটির প্রান্তে সমাপতিত হইরা A বিন্দু হইল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$AB^2-AC^2=(AB+AC)(AB-AC)।$$

অঙ্কন। AB ও ACর উপর যথাক্রমে ABDE, ACFG বর্গক্ষেত্রদ্বয় অঙ্কিত কর। AG ও AE একই সবলরেখা হইবে।

CFকে বর্ধিত কর ; ধব, ইহা EDকে H বিন্দুতে ছেদ কবিল। তাহা হইলে $AB=DB=CH$, $AC=GF=EH$, $CB=GE=FH$।

প্রমাণ। ক্ষেত্র AD − ক্ষেত্র AF = ক্ষেত্র CD + ক্ষেত্র GH,

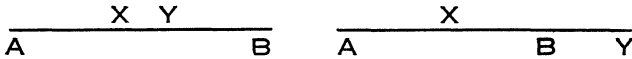
$$\therefore\ AB^2-AC^2=DB.BC+GF.GE$$
$$=AB.CB+AC.CB$$
$$=(AB+AC)CB \qquad [\text{উপ. ৪৮}]$$
$$=(AB+AC)(AB-AC)।$$

এখন, AB, ACর মান যদি যথাক্রমে a, b একক হয়, তবে $CB = a - b$ একক এবং $AB^2 = a^2$ বর্গ একক, $AC^2 = b^2$ বর্গ একক, এবং

$$(AB+AC)(AB-AC) = (a+b)(a-b) \text{ বর্গ একক ।}$$

অর্থাৎ $$\mathbf{a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)} \text{ ।}$$

অনু. ১। যদি কোন AB সরলরেখা, X বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয় এবং কোন Y বিন্দুতে অন্তর্বিভক্ত (বা বহির্বিভক্ত) হয়, তবে Y দ্বারা বিভক্ত অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র. উক্ত সরলরেখার অর্ধাংশ AX এবং XYএর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের অন্তরের সমান।

A X Y B   A X B Y

১. চিত্র (অন্তর্বিভক্ত) : চিত্র ২৯০ : ২, চিত্র (বহির্বিভক্ত)

(১ চিত্রে) $AY.YB = AX^2 - XY^2$ হইবে ;

কারণ, $$AY.YB = (AX+XY)(BX-XY)$$
$$= (AX+XY)(AX-XY)$$
$$= AX^2 - XY^2 \text{ ।}$$

(২. চিত্রে) $AY.YB = XY^2 - AX^2$ হইবে ;

কারণ, $$AY.YB = (XY+AX)(XY-BX)$$
$$= (XY+AX)(XY-AX)$$
$$= XY^2 - AX^2 \text{ ।}$$

অনু. ২। যদি কোন AB সরলরেখা X বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত হয় এবং কোন Y বিন্দুতে অন্তর্বিভক্ত (বা বহির্বিভক্ত) হয়, তবে খণ্ডিত অংশদ্বয়ের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র দুইটির অন্তর, AB- রেখা ও XY- অংশের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের দ্বিগুণ মাত্রার সমান।

(১ অনু. ১. চিত্রে) $$AY^2 - YB^2 = (AY+YB)(AY-YB)$$
$$= AB.(AX+XY-\overline{BX-XY})$$
$$= 2AB.XY \text{ ।}$$

(১ অনু. ২. চিত্রে) $$AY^2 - YB^2 = (AY+YB)(AY-YB)$$
$$= (AX+XY+XY-XB).AB$$
$$= 2XY.AB \text{ ।}$$

অনুশীলনী ৬৫

১। চিত্র সাহায্যে নিম্নলিখিত অভেদগুলি প্রতিপন্ন কর এবং প্রত্যেকটির সাধারণ নির্বচন লিখ :—

(ক) $(2a)^2 = 4a^2$

(খ) $a(b-c) = ab - ac$

(গ) $(a+b)^2 = a(a+b) + b(a+b)$ ।

(ঘ) $(a+b)(x+y) = ax + bx + ay + by$ ।

(ঙ) $(a-b)(x-y) = ax - ay - bx + by$

(চ) $(a+b)(x-y) = ax + bx - ay - by$

(ছ) $(x+2)(x+3) = x^2 + 5x + 6$

(জ) $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$ ।

(ঝ) $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$ ।

২। প্রমাণ কর যে কোন সরল রেখার উপর বর্গক্ষেত্র ঐ সরলরেখার অর্ধেকের উপর বর্গক্ষেত্রের চারিগুণ। (ক. প্র. ১৯৩১)

৩। প্রমাণ কর যে কোন সরলরেখার উপর বর্গক্ষেত্র ঐ সরলরেখার এক-তৃতীয়াংশের উপর বর্গক্ষেত্র নয়গুণ।

৪। একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে এরূপ দুই অংশে বিভক্ত কর যেন সমগ্র রেখা ও একাংশের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র অন্যাংশের বর্গক্ষেত্রের ছয়গুণ হয়।

সঙ্কেত। $a(a-x) = 6x^2$ । $x =$ কত ?

৫। একটি সরলরেখাকে দুই অংশে বিভক্ত করা হইল। যদি ঐ অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের দ্বিগুণ, অংশদ্বয়ের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের সমষ্টির সমান হয়, তবে প্রমাণ কর যে ঐ সরল রেখা দ্বিখণ্ডিত হইবে। (ক. প্র. ১৯১৬)

৬। কোন সরলরেখাকে কিরূপে অন্তর্বিভক্ত করিলে অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র বৃহত্তম হইবে ? (৫১. উপঃ ১. অনু. দ্রষ্টব্য)

৭। কোন সরলরেখা ABতে C বিন্দু লইলে $AB^2 + BC^2 = AC^2 + 2AB.BC$ হইবে।

৮। কোন নির্দিষ্ট সরলরেখাকে কিরূপে অন্তর্বিভক্ত করিলে অংশদ্বয়ের বর্গক্ষেত্র দুইটির সমষ্টি ক্ষুদ্রতম হইবে ?

সঙ্কেত। $a^2 + b^2 = 2ab + (a-b)^2$ ।

৯। সরলরেখা AB, C বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত হইল, এবং D, AB (বা বর্ধিত AB)র উপর অপর একটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে

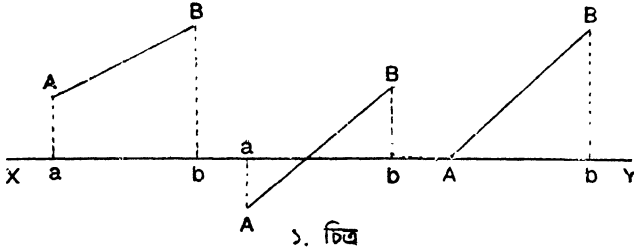
$$AD^2 + DB^2 = 2(AC^2 + CD^2)$$ ।

১০। ABC ত্রিভুজের $\angle B$ সমকোণ, এবং $BX \perp AC$; প্রমাণ কর $BX^2 = AX.XC$ ।

১১। দুইটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের অন্তরফলের সমান করিয়া একটি আয়তক্ষেত্র অঙ্কন কর।

তৃতীয় অধ্যায়

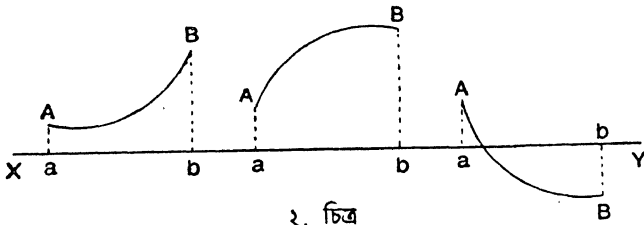
পাথাগোরাস উপপাদ্যের বিস্তৃতি

৯৩। কোন নির্দিষ্ট সরল রেখার উপর কোন বিন্দুর **অভিক্ষেপ** (Projection of a point) জানিতে হইলে, সেই বিন্দু হইতে রেখাটির উপর

১. চিত্র

চিত্র ২৯১

অঙ্কিত লম্বের যে পাদবিন্দু (foot) পাওয়া যাইবে সেই বিন্দুটিই প্রথম বিন্দুর অভিক্ষেপ। উপরের চিত্রে XY সরল রেখার উপর A বিন্দুর অভিক্ষেপ a বিন্দু দেখান হইয়াছে।

কোন সরল বা বক্ররেখারও অভিক্ষেপ হইতে পারে। মনে কর, XY একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা, এবং সরলরেখা ABর (১. চিত্র) বা বক্ররেখা ABর (২. চিত্র XYএর উপর অভিক্ষেপ জানিতে হইবে। ABর প্রান্তবিন্দু A ও B হইতে XYএর উপর Aa, Bb লম্ব ফেল (উভয় চিত্র)। তাহা হইলে লম্বদ্বয় দ্বারা XY রেখার যতটুকু অংশ (ab) কর্তিত হয় তাহাই ABর অভিক্ষেপ।

২. চিত্র

চিত্র ২৯২

মন্তব্য। লম্ব টানিয়া অভিক্ষেপ নির্ণীত হয়, এজন্য abকে XYএর উপর ABর **লম্ব অভিক্ষেপ** (Orthogonal Projection) বলে।

অনুশীলনী ৬৫

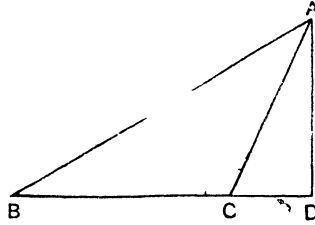
১। প্রমাণ কর যে কোন একটি সীমাবদ্ধ সরলরেখার অপর যে কোন সরল রেখার উপর লম্ব অভিক্ষেপ উক্ত সীমাবদ্ধ রেখা হইতে দীর্ঘতর হইতে পারে না। যখন উভয়ে সমদীর্ঘ হইবে তখন চিত্রটি কিরূপ হইবে ?

২। দুইটি সমদীর্ঘ ও সমান্তরাল সরলরেখার অন্য কোন সরল রেখার উপর লম্ব অভিক্ষেপদ্বয় সমদীর্ঘ হইবে।

৩। পরস্পর সমকোণে নত দুইটি সরল রেখার উপর একটি d একক দীর্ঘ সরলরেখার লম্ব অভিক্ষেপ যথাক্রমে x ও y একক। প্রমাণ কর যে $d^2 = x^2 + y^2$

উপপাদ্য ৫২ [Theorem 52]

স্থূলকোণী ত্রিভুজে, স্থূলকোণেব বিপবীত বাহুব উপব বর্গক্ষেত্র. উহাব অপব দুই বাহুব উপব বর্গক্ষেত্রদ্বয় এবং ঐ দুই বাহুব যে কোন একটি ও তাহাব উপব অপব বাহুব লম্ব-অভিক্ষেপেব অন্তর্গত আযতক্ষেত্রেব দ্বিগুণেব সমষ্টিব সমান হইবে।

* [In an obtuse-angled triangle, the square on the side opposite the obtuse angle is equal to the sum of the squares on the other two sides *together with* twice the rectangle contained by one of those sides and the projection on it of the other]

চিত্র ২৯৩

ABC ত্রিভুজেব $\angle C$ স্থূলকোণ, AB বিপবীত বাহু, AC, BC অপর বাহুদ্বয়। ধর, BCব বর্ধিতাংশেব উপব AD লম্ব টানা হইযাছে সুতবাং, BCব উপব ACব লম্ব-অভিক্ষেপ হইল CD।

প্রমাণ কবিতে হইবে যে

$$AB^2 = BC^2 + CA^2 + 2BC.CD \text{।}$$

প্রমাণ। $AB^2 = AD^2 + BD^2$ (পীথা উপ)

কিন্তু $BD^2 = (BC+CD)^2 = BC^2 + CD^2 + 2BC\ CD$ (উপ ৪৯)

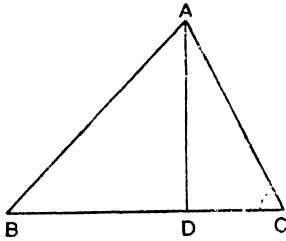
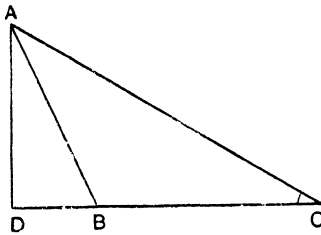
$\therefore\ AB^2 = AD^2 + BC^2 + CD^2 + 2BC\ CD$

পুনশ্চ, $AD^2 + CD^2 = CA^2$ (পীথা উপ)

$\therefore\ AB^2 = BC^2 + CA^2 + 2BC.\ CD$।

উপপাদ্য ৫৩ (Theorem 35)

যে কোন ত্রিভুজে, কোন সূক্ষ্মকোণের বিপরীত বাহুর উপর বর্গক্ষেত্র, উহার অপর দুই বাহুর উপর বর্গক্ষেত্রের সমষ্টি হইতে ঐ দুই বাহুর যে কোন একটি ও তাহার উপর অপরটির লম্ব-অভিক্ষেপের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের দ্বিগুণের অন্তর ফলের সহিত সমান হইবে।

[In any triangle, the square on the side opposite an acute angle is equal to the sum of the squares on the other two sides *diminished* by twice the rectangle contained by one of those sides and the projection on it of the other.]

১. চিত্র

২. চিত্র

ABC ত্রিভুজের ∠C সূক্ষ্মকোণ, AB ইহার বিপরীত বাহু। AC, BC অপর বাহুদ্বয়। ধর, ACর উপর (১. চিত্র) এবং CBর বর্ধিতাংশের উপর (২. চিত্র), AD লম্ব টানা হইয়াছে। সুতরাং, BCর উপর ACর লম্বঅভিক্ষেপ হইল CD (উভয় চিত্র)।

প্রমাণ করিতে হইবে যে

$$AB^2 = BC^2 + CA^2 - 2BC.CD$$।

প্রমাণ। $AB^2 = AD^2 + BD^2$ (পীথা. উপ.)

কিন্তু, $BD = BC - DC$, অথবা $DC - BC$

$\therefore\ BD^2 = BC^2 + DC^2 - 2\ BC.DC$

$\therefore\ AB^2 = AD^2 + BC^2 + DC^2 - 2BC.DC$

পুনশ্চ, $AD^2 + DC^2 = CA^2$ (পীথা. উপ.)

$\therefore\ AB^2 = BC^2 + CA^2 - 2BC.CD$।

মন্তব্য। ৫২. ও ৫৩. উপপাদ্য দুইটি যেন ২৮. উপপাদ্যের (**পীথাগোরাসের উপপাদ্য**) বিস্তৃতি। এই তিনটি উপপাদ্যের সিদ্ধান্তানুসারে একটি নিম্নলিখিত মানদণ্ড (criteria) নির্ধারণ করিতে পারা যায়—

কোন ABC ত্রিভুজের

(ক) $\angle C$ স্থূলকোণ হইলে, $AB^2 > BC^2 + CA^2$;

(খ) $\angle C$ সমকোণ হইলে, $AB^2 = BC^2 + CA^2$;

(গ) $\angle C$ সূক্ষ্মকোণ হইলে, $AB^2 < BC^2 + CA^2$।

অনুশীলনী ৬৬

১। কোন ত্রিভুজের তিনটি বাহু দেওয়া থাকিলে কিরূপে পরীক্ষা করিতে পারা যায় যে ত্রিভুজটি স্থূলকোণী, বা সমকোণী, বা সূক্ষ্মকোণী ?

নিম্নলিখিত ত্রিভুজগুলির বাহু দেওয়া আছে, উহাদের পরীক্ষা কর :—

(ক) 6, 8, 9 ; (খ) 5, 6, 10 ; (গ) 5, 12, 13।

২। ACB সরলরেখার AC অংশের উপর একটি সমবাহু ত্রিভুজ ACD অঙ্কন করা হইল ; প্রমাণ কর

$$DB^2 = AC^2 + CB^2 + AC.CB।$$

৩। যদি কোন $\triangle ABC$র $\angle B$ অর্ধসমকোণ হয়, প্রমাণ কর

$$AB^2 + BC^2 = AC^2 + 4\triangle ;$$

$\triangle$ অর্থে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল।

৪। $\triangle ABC$র $\angle C$ স্থূলকোণ ; D, BCর উপর A বিন্দুর অভিক্ষেপ ; এবং E ACর উপর B বিন্দুর অভিক্ষেপ। প্রমাণ কর

$$AB^2 = BC.BD + AC.AE।$$

৫। ACBD চতুর্ভুজের $AC = CD$; $AD = BC$; এবং $\angle ACB$, $\angle ADC$র সম্পূরক। প্রমাণ কর $AB^2 = BC^2 + CD^2 + DA^2$।

৬। ABCD বর্গক্ষেত্রের AC কর্ণ E বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত হইয়াছে যেন $CE = BC$; প্রমাণ কর $BE^2 = AC.AE$।

৭। $\triangle ABC$র $\angle B = 60°$। প্রমাণ কর $AC^2 = AB^2 + BC^2 - AB.BC$।

৮। $\triangle ABC$র $\angle B = 90°$; AD, BCর উপর মধ্যমা।

৫২. উপপাদ্য প্রয়োগ করিয়া প্রমাণ কর $AC^2 = AD^2 + 3CD^2$।

৯। $\triangle ABC$র $AD \perp BC$ এবং $BE \perp AC$; প্রমাণ কর $BC.CD = AC.CE$।

১০। ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের $AB = AC$, এবং $BD \perp AC$; প্রমাণ কর $BC^2 = 2AC.CD$।

১১। ΔABCর, $AB=3''$, $BC=5''$, $\angle B=120^\circ$। ACর দৈর্ঘ্য কত ?

১২। ΔABCর, $AC=8$ সেঃ মিঃ, $AB=10$ সেঃ মিঃ, $\angle A=45^\circ$। BCর দৈর্ঘ্য কত ?

১৩। একটি ত্রিভুজের বাহুগুলি $5''$, $7''$, $9''$ হইলে উহার একটি কোণ 60° হইবে।

১৪। ABCD একটি চতুর্ভুজ ; BM, DN যথাক্রমে B, D হইতে ACর উপর লম্বদ্বয়। প্রমাণ কর

$$(AB^2+CD^2)\sim(AD^2+BC^2)=2AC.MN$$।

সঙ্কেত। AC, BD কর্ণদ্বয় O বিন্দুতে ছেদ করিল ; ধর, $\angle AOB$ সূক্ষ্মকোণ। AOB, BOC, COD, DOA ত্রিভুজ লইয়া বিচার কর।

১৫। ABCD একটি চতুর্ভুজ। যদি $AB^2+CD^2=BC^2+AD^2$ হয়, তবে কর্ণদ্বয় সমকোণে নত হইবে।

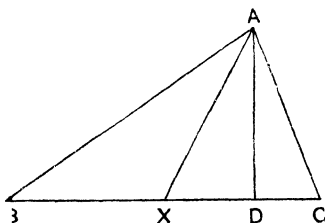
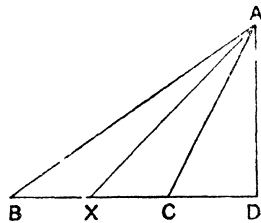
১৬। কোন ট্রাপিজিয়মের কর্ণদ্বয়ের বর্গের সমষ্টি অসমান্তরাল বাহুদ্বয়ের বর্গ ও সমান্তরাল বাহুদ্বারা গঠিত আয়তক্ষেত্রের দ্বিগুণের সমষ্টির সমান হইবে।

[The sum of the squares on the diagonals of a trapezium is equal to the sum of the squares on the two non-parallel sides together with twice the rectangle by the two parallel sides.]

উপপাদ্য ৫৪ (Theorem 54)

ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহুর উপর বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টি, তৃতীয় বাহুর অর্ধাংশের উপর বর্গক্ষেত্র এবং তৃতীয় বাহুর দ্বিখণ্ডক মধ্যমার উপর বর্গক্ষেত্র এই উভয় ক্ষেত্রফলের সমষ্টির দ্বিগুণ।

(য়্যাপোলোনিয়সের উপপাদ্য)

[In any triangle the sum of the squares on any two sides is equal to twice the square on half the third side together with twice the square on the median which bisects the third side]

১. চিত্র

২. চিত্র

চিত্র ২৯৫

△ABCর মধ্যমা AX, BC বাহুকে দ্বিখণ্ডিত করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে

$AB^2+AC^2=2BX^2+2AX^2$।

BCর (বা BCর বর্ধিতাংশের) উপর AD লম্ব টান।

প্রমাণ। ∵ ABX ত্রিভুজে ∠AXB একটি স্থূলকোণ (>সমকোণ D);

∴ $AB^2=AX^2+BX^2+2BX.XD$ (উপ. ৫২)

পুনশ্চ, ∵ AXCত্রিভুজে ∠AXC একটি সূক্ষ্মকোণ (<সমকোণ D);

∴ $AC^2=XC^2+AX^2-2XC.XD$। (উপ. ৫৩)

অতএব, $AB^2+AC^2=2BX^2+2AX^2$ (∵ BX=CX)

দ্রষ্টব্য। যদি $AX=d$ হয়, তবে

$$b^2+c^2=2d^2+2(\tfrac{1}{2}a)^2=2d^2+\tfrac{1}{2}a^2$$

$$\therefore\ d^2=\frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}$$

$$\therefore \quad d = \sqrt{\frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}}$$

এই সূত্র অবলম্বনে কোন ত্রিভুজের তিনটি বাহু দেওয়া থাকিলে মধ্যমা তিনটি নির্ণয় করা যায়।

অনুশীলনী ৬৭

১। কোন ত্রিভুজের বাহুগুলি 4″, 8″, 10″ হইলে উহার মধ্যমাগুলির দৈর্ঘ্য কত?

২। কোন সামান্তরিকের সন্নিহিত বাহুদ্বয় 13″ ও 19″, এবং একটি কর্ণ 24″; অপর কর্ণের দৈর্ঘ্য কত?

৩। G, $\triangle$AECর ভরকেন্দ্র; AB = 6, BC = 11, CA = 7; GAর দৈর্ঘ্য কত?

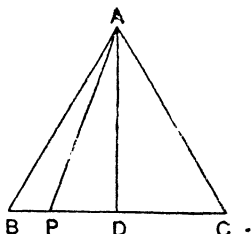
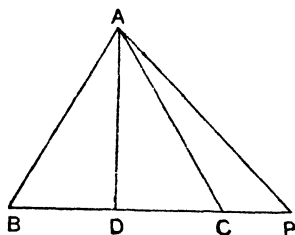
৪। কোন ত্রিভুজের বাহুগুলি 5, 6, 7 হইলে মধ্যমাগুলির বর্গফলের সমষ্টি নির্ণয় কর।

৫। ABCD একটি সামান্তরিক; প্রমাণ কর
$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$।

৬। ABCD একটি চতুর্ভুজ; X, Y কর্ণদ্বয় AC, BDর মধ্যবিন্দু। প্রমাণ কর $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4XY^2$।

৭। ABCD আয়তক্ষেত্রের অভ্যন্তরস্থ P একটি বিন্দু; প্রমাণ কর
$PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$।

৮। P, ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের BC ভূমির (বা বর্ধিত BCর) উপর যে কোন বিন্দু। প্রমাণ কর যে $AB^2 \sim AP^2 = BP.\ PC$।

[পাপ্পাসের উপপাদ্য]

১. চিত্র

২. চিত্র

চিত্র ২৯৬

প্রমাণ। BCর উপর AD লম্ব অঙ্কিত কর।

$AB^2 = BD^2 + DA^2$; $AP^2 = PD^2 + DA^2$।

(১. চিত্রে) $AB^2 - AP^2 = BD^2 - PD^2$
$= (BD + PD)(BD - PD)$
$= (CD + PD)BP = PC.\ PB$ ।

(২. চিত্রে) $AP^2 - AB^2 = PD^2 - BD^2 = (PD + BD) \times (PD - BD)$
$= BP.\ (PD - CD) = BP.\ PC$ ।

৯। ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের $AB = AC$। ACকে D পর্যন্ত বর্ধিত কর যেন $CD = AC$ হয়। প্রমাণ কর

$$BD^2 = 2BC^2 + AC^2 \text{ ।}$$

১০। ΔABCর $\angle A = 90°$, BCকে P ও Q বিন্দু দ্বারা ত্রিখণ্ডিত করা হইল। প্রমাণ কর $AP^2 + AQ^2 = 5PQ^2$ ।

১১। ΔABCর মধ্যমাগুলির মিলনবিন্দু G ; প্রমাণ কর

$$AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3(AG^2 + BG^2 + CG^2) \text{ ।}$$

১২। প্রমাণ কর যে কোন সমকোণী ত্রিভুজেব মধ্যমাগুলির উপর বর্গক্ষেত্রের সমষ্টি, অতিভুজের উপর বর্গক্ষেত্রেব দেড়গুণ হইবে।

১৩। দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু A, B হইতে তৃতীয় বিন্দু P এরূপ দূরে আছে যে $PA^2 + PB^2 =$ একটি ধ্রুব সংখ্যা। P বিন্দুর সঞ্চার পথ কি ?

সঙ্কেত। $PA^2 + PB^2 = 2AX^2 + 2PX^2$ (X, ABর মধ্যবিন্দু) ; XP নির্দিষ্ট হওয়ায় পথটি একটি বৃত্ত, যাহার কেন্দ্র X ও ব্যাসার্ধ $= XP$ ।

১৪। দুইটি স্থির বিন্দু A, B হইতে তৃতীয় বিন্দু P এরূপ দূরে আছে যে $PA^2 - PB^2 =$ একটি ধ্রুব সংখ্যা। P এর সঞ্চারপথ কি ?

১৫। ABC সমবাহু ত্রিভুজের BC বাহুটি H ও K বিন্দুতে ত্রিখণ্ডিত হইয়াছে। দেখাও যে $AH^2 = \frac{7}{9}AB^2$ হইবে।

১৬। ΔABCর মধ্যমাগুলি AD, BE, CF হইলে দেখাও যে,

$$AB^2 + BC^2 + CA^2 = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2) \text{ ।}$$

১৭। A, B দুইটি স্থির বিন্দু, P বিন্দুব সংস্থান এরূপ যে $2PA^2 + 3PB^2 =$ নির্দিষ্ট সংখ্যা। Pএর সঞ্চারপথ কি ?

১৮। ΔABCর BC ভূমিতে X বিন্দু লও যেন $BX = 2CX$ হয়। প্রমাণ কর $AB^2 + 2AC^2 = 3AX^2 + 2CX^2 + BX^2 = 3AX^2 + \frac{2}{3}BC^2$ ।

১৯। ΔABCর BC ভূমিস্থ X বিন্দু এরূপ যে $BX = n.\ CX$; প্রমাণ কর $AB^2 + n.\ AC^2 = (n+1)AX^2 + n.CX^2 + BX^2$

$$= (n+1)AX^2 + \frac{n}{n+1}BC^2 \text{ ।}$$

২০। G, ABC ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র এবং P অপর একটি বিন্দু। প্রমাণ কর

(ক) $AB^2+AC^2=GB^2+GC^2+4GA^2$,

(খ) $PA^2+PB^2+PC^2=3PG^2+GA^2+GB^2+GC^2$।

২১। কোন চতুর্ভুজের চারিটি বাহুর বর্গ সমষ্টি ইহার কর্ণদ্বয়ের বর্গ ও কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দুদ্বয়ের দূরত্বের বর্গের চারিগুণের সমষ্টির সমান হইবে।

২২। কোন বৃত্তের ব্যাস ABর উপরিস্থিত কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্তী C ও D দুইটি বিন্দু। P বৃত্তের পরিধিস্থ যে কোন বিন্দু। প্রমাণ কর $PC^2+PD^2=AC^2+AD^2$

২৩। AB একটি অর্ধবৃত্তের ব্যাস এবং CD, ABর সমান্তরাল যে কোন জ্যা এবং P, AB স্থিত যে কোন বিন্দু; প্রমাণ কর $PA^2+PB^2=PC^2+PD^2$

২৪। একটি সামান্তরিকের কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত হইল। প্রমাণ কর যে উক্ত বৃত্তস্থ যে কোন বিন্দু হইতে সামান্তরিকের কৌণিকবিন্দুগুলির দূরত্বের বর্গসমষ্টি ধ্রুবক।

২৫। A, B, C, D চারিটি বিন্দু একটি সরলরেখায় ক্রমহিসাবে অবস্থিত। প্রমাণ কর যে

(ক) $AC.BD=BC.AD+AB.CD$

(খ) $AC^2+BD^2=AB^2+CD^2+2AD.BC$

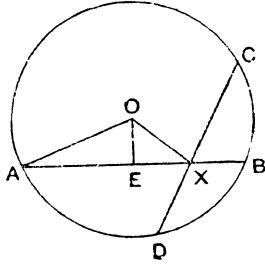
(গ) $AD^2+BC^2=AC^2+BD^2+2AB.CD$

চতুর্থ অধ্যায়

কর্তিত জ্যার আয়তক্ষেত্রীয় ধর্ম

উপপাদ্য ৫৫ (Theorem 55)

কোন বৃত্তের তুইটি জ্যা অন্তঃস্থ কোন বিন্দুতে ছেদ করিলে একের অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র অন্যটির অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমান হইবে।

[If two chords of a circle intersect at a point within it, the rectangle contained by the segments of the one is equal to the rectangle contained by the segments of the other.]

চিত্র ২৯৭

O, ABC বৃত্তের কেন্দ্র; AB, CD জ্যাদ্বয় অন্তঃস্থ X বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে AX.XB = CX.XD।

OE ⊥ AB টান; OA, OX যোগ কর।

প্রমাণ। $AX.XB = (AE+EX)(EB-EX)$

$= (AE+EX)(AE-EX) \quad \because AE = EB$

$= AE^2 - EX^2$

$= (OA^2 - OE^2) - (OX^2 - OE^2)$

$= OA^2 - OX^2$

$= (\text{ব্যাসার্ধ})^2 - OX^2$।

অনুরূপে প্রমাণ করা যাইবে $CX.\ XD = (\text{ব্যাসার্ধ})^2 - OX^2$

$\therefore \quad AX.XB = CX.XD$।

অনু. ১। X বিন্দুগামী যে জ্যাটি ঐ বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত হয় তাহার অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র **বর্গক্ষেত্র** হওয়ায় এই সিদ্ধান্ত করা যায় যে—

বৃত্তের অন্তঃস্থ কোন বিন্দুগামী যে সমুদয় জ্যা অঙ্কিত হয় তাহাদের অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র, ঐ বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত জ্যাটির অর্ধেকের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের সমান।

অনু. ২। AXB একটি ব্যাস হইলে এবং CXD তাহার লম্ব হইলে, $AX.XB = CX^2$। (এতদ্বারা কোন আয়তক্ষেত্রের সমান করিয়া একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কন করিতে পারা যায়—২৮ সম্পাদ্য দ্রষ্টব্য)।

মন্তব্য। ইহার **বিপরীত উপপাদ্যটি**ও সত্য। যথা,

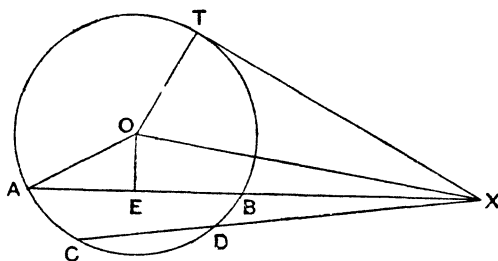
দুই সসীম সরলরেখা পরস্পর ছেদ করিলে যদি একের অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র অপরের অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমান হয়, তবে রেখাদ্বয়ের চারিটি প্রান্তবিন্দু সমবৃত্ত হয়।

২৯৭ চিত্রে A, D, C বিন্দুগামী বৃত্তের উপর B না থাকিলে বৃত্তটি AB রেখাকে অন্তঃস্থ বা বহিঃস্থ কোন বিন্দু B′এ ছেদ করিবে। সুতরাং $AX.XB' = CX.XB$; কিন্তু উপাত্তটি,—$AX.XB = CX.XD$।

অতএব B′ Bর সহিত মিলিবে।

উপপাদ্য ৫৬ (Theorem 56)

বৃত্তের দুইটি জ্যা বহিঃস্থ কোন বিন্দুতে ছেদ করিলে একের অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র অন্যটির অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমান হইবে; এবং, উক্ত সমান সমান আয়তক্ষেত্র ঐ বহির্বিন্দু হইতে বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের উপর বর্গক্ষেত্রের সমান হইবে।

[If two chords of a circle intersect at a point outside it, the rectangles contained by their segments are equal; and each rectangle is equal to the square on the tangent from the point of intersection.]

চিত্র ২৯৮

O, ACB বৃত্তের কেন্দ্র; AB, CD জ্যাদ্বয় বহিঃস্থ X বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে; এবং XT বৃত্তের একটি স্পর্শক।

প্রমাণ করিতে হইবে $AX.XB = CX.XD = XT^2$।

$OE \perp AB$ টান; OA, OX, OT যোগ কর।

প্রমাণ। $AX.XB = (EX+AE)(EX-BE)$
$= (EX+AE)(EX-AE) \quad \because AE = BE$
$= EX^2 - AE^2$
$= (OX^2 - OE^2) - (OA^2 - OE^2)$
$= OX^2 - OA^2$
$= OX^2 - (\text{ব্যাসার্ধ})^2$।

অনুরূপে প্রমাণ করা যাইবে

$CX.XD = OX^2 - (\text{ব্যাসার্ধ})^2$।

পুনশ্চ, $XT^2 = OX^2 - OT^2$ ($\angle OTX$ সমকোণ)
$= OX^2 - (\text{ব্যাসার্ধ})^2$।

$\therefore \quad AX.XB = CX.XD = XT^2$।

মন্তব্য ১। XT^2 $(= OP^2 - r^2)$ এই সংখ্যাটিকে ঐ বৃত্ত সম্পর্কে X বিন্দুর ঘাত (Power) বলে; এই ঘাত অর্থাৎ XT^2 ধনাত্মক (Positive) হইলে X বিন্দুটি বৃত্তের বাহিরে, শূন্য (zero) হইলে বৃত্তের পরিধিতে এবং ঋণাত্মক (Negative) হইলে বৃত্তের ভিতরে থাকিবে।

২। যে কোন একটি ছেদক XBAর চরম পরিণতি স্পর্শক XT (বা অপর স্পর্শক XT′ —চিত্রে নাই), এবং উক্ত সিদ্ধান্তটি ছেদকের যে কোন অবস্থানে সত্য।

ইহার বিপরীত উপপাদ্যটির প্রথমাংশ, ৫৫ উপঃ, ২ অনুসিদ্ধান্তের মত প্রমাণ করা যায়। ইহার সাধারণ নির্বচনটি এইরূপ হইবে—

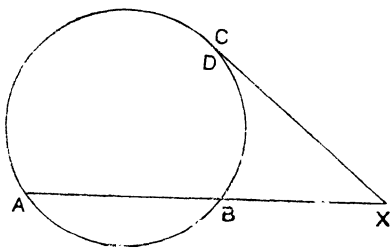
উপপাদ্য ৫৬ (ক)

দুই সসীম সরলরেখা বর্ধিত হইয়া পরস্পর ছেদ করিলে যদি একের অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র অপরের অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমান হয়, তবে রেখাদ্বয়ের চারিটি প্রান্তবিন্দু সমবৃত্ত হইবে।

বিপরীত উপপাদ্যের শেষাংশটির সাধারণ নির্বচন এইরূপ হইবে—

উপপাদ্য ৫৬ (খ)

বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে একটি ছেদক, এবং অপর একটি ঐ বৃত্তের একবিন্দুতে অবচ্ছিন্ন সরলরেখা টানিলে যদি ছেদকের অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র দ্বিতীয় রেখার উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের সমান হয় তবে শেষোক্ত রেখাটি ঐ বৃত্তের স্পর্শক হইবে।

[If from a point outside a circle a secant is drawn and another straight line which meets it, and if the rectangle contained by the segments of the secant is equal to the square on the line which meets only, then the latter is a tangent to the circle.]

চিত্র ২৯৯

বহিঃস্থ বিন্দু X হইতে XBA বৃত্তটির একটি ছেদক এবং XC সরলরেখা বৃত্তের C বিন্দুতেই অবচ্ছিন্ন হইয়াছে, এবং $XA.XB = XC^2$ হইয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, XC বৃত্তের স্পর্শক।

প্রমাণ। যদি XC বর্ধিত করিলে ইহা বৃত্তকে D বিন্দুতে পুনশ্ছেদ করে, তাহা হইলে $XA.XB = XC.XD$;

কিন্তু $XA.XB = XC^2$; (স্বীকার)

$\therefore \quad XC.XD = XC^2$;

$\therefore \quad XC = XD$।

অতএব C, D সমাপতিত হইয়া XC সরলরেখা স্পর্শক হইবে।

অনুশীলনী ৬৮

১। দুইটি জ্যা AB, CD বৃত্তের অন্তঃস্থ X বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। যদি $AX=1\cdot2''$, $CX=1\cdot6''$, এবং $XD=\cdot6''$ হয়; XBর দৈর্ঘ্য কত ?

২। দুইটি জ্যা AB, CD বৃত্তের বহিঃস্থ X বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। $AX=3\cdot2''$. $XB=1\cdot2''$. $XD=1\cdot6''$ হইলে, জ্যা CDর দৈর্ঘ্য কত ?

৩। AB জ্যাকে X বিন্দুতে বর্ধিত করিয়া ঐ বিন্দু হইতে বৃত্তে একটি স্পর্শক অঙ্কিত করা করা হইল।

(ক) যদি $XT=6\cdot4''$ এবং $XB=3\cdot2''$ হয়, AB জ্যার দৈর্ঘ্য কত ?

(খ) যদি $AB=1$ সেঃ মিঃ এবং $BX=2\cdot7$ সেঃ মিঃ হয়, XTর দৈর্ঘ্য কত ?

৪। কোন চাপের দ্বারা খণ্ডিত জ্যার দৈর্ঘ্য $16''$ এবং চাপের উন্নতি (জ্যা হইতে) $=4''$; বৃত্তটির ব্যাসার্ধ কত ?

৫। কোন চাপাকৃতি সেতুর ব্যাসার্ধ 32 ফুট, সেতুর উচ্চতা 12 ফুট; সেতুটির খিলানের প্রসার কত ?

দ্রষ্টব্য। খিলানের প্রসার (span) একটি বৃত্তের জ্যা হইবে। সেতুর উচ্চতা জ্যা হইতে চাপের মধ্যবিন্দুর দূরত্ব ।

৬। কোন সেতুর খিলানের প্রসার $2l$, সেতুর উচ্চতা h হইলে সেতুর ব্যাসার্ধ $=\dfrac{l^2+h^2}{2h}$ হইবে।

৭। $\triangle ABC$র $\angle A$ সমকোণ, এবং $AP \perp BC$; প্রমাণ কর যে

(ক) $BP.PC=AP^2$

(খ) $BP.BC=BA^2$

(গ) $CP.CB=CA^2$

৮। দুইটি বৃত্ত A ও B বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিলে, ABকে বর্ধিত করিয়া ইহার উপর যে কোন বিন্দু লও। প্রমাণ কর যে, সেই বিন্দু হইতে অঙ্কিত দুই বৃত্তের স্পর্শক পরস্পর সমান ; এবং, প্রমাণ কর যে AB, বৃত্তদ্বয়ের যে কোন সরল সাধারণ স্পর্শককে দ্বিখণ্ডিত করে।

৯। ABC ত্রিভুজের AX, BY, CZ যথাক্রমে BC, CA, ABর উপর লম্ব। যদি O লম্ববিন্দু হয়, প্রমাণ কর $AO.OX=BO.OY=CO.OZ$

১০। কোন জ্যা ABর উপরিস্থ P বিন্দু হইতে এমন একটি সরলরেখা অঙ্কিত কর যাহা বৃত্তের পরিধিকে R বিন্দুতে ছেদ করিলে $PR^2=AP.\ PB$ হইবে।

১১। দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু P, Q দিয়া যত বৃত্তই অঙ্কিত হউক না কেন, যদি কোন X বিন্দু হইতে অঙ্কিত বৃত্তগুলির স্পর্শকসমূহ পরস্পর সমান হয় তবে X বিন্দুর সঞ্চারপথ কি ?

১২। AB, CD কোন বৃত্তের জ্যাদ্বয় ; কোন এককেন্দ্রীয় বৃত্তকে AB, CD যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে $AP.\ PB=CQ.\ QD$।

১৩। AB কোন বৃত্তের ব্যাস ; E বিন্দু পরিধিস্থ; ABর বর্ধিতাংশস্থিত কোন C বিন্দু হইতে ABর উপর লম্ব টানা হইল ; এই লম্ব, বর্ধিত AE রেখাকে D বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর

$$AE.\ AD = AB.\ AC$$ ।

১৪। ΔABCর $\angle A$ স্থূলকোণ। A হইতে BC পর্যন্ত এমন রেখা AD টান যাহাতে

(ক) $AD^2 = BD.DC$ হয় ; (খ) $BA^2 = BD.\ BC$ হয়।

১৫। P, Q, R, S কোন সরলরেখায় অবস্থিত চারিটি ক্রমিক বিন্দু। ঐ রেখায় অবস্থিত হইবে এমন O বিন্দুর উদ্দেশ কিরূপে পাওয়া যাইতে পারে যদি $OQ.OR = OP.OS$ হয় ?

[সংকেত। P, B এবং Q, R ভিতর দিয়া এমন যে কোন দুইটি বৃত্ত অঙ্কিত কর যেন তাহারা পরস্পর ছেদ করে ; ইহাদের সাধারণ জ্যাটি বর্ধিত করিলেই বিন্দুটি পাওয়া যাইবে।]

১৬। ΔABCর PQR পাদত্রিভুজ ; প্রমাণ কর $AQ.AC = AR.AB$ ।

১৭। ΔABC সমদ্বিবাহু ($AB = AC$) ; AB, D বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত হইল ; ACর উপর E বিন্দু লও যাহাতে $AE = \frac{1}{4}AC$ হয়। প্রমাণ কর যে, E, D, C বিন্দুমধ্যগামী বৃত্তটির স্পর্শক হইবে AB।

১৮। কোন বৃত্তের AB, CD জ্যাদ্বয় O বিন্দুতে পরস্পর লম্বভাবে ছেদ করে, প্রমাণ কর

$$OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 = (\text{ ব্যাস })^2$$ ।

১৯। ABC সসীম সরলরেখার $AB = a$, $BC = b$; AB ব্যাসের উপর একটি বৃত্ত অঙ্কিত হইল ; C বিন্দু হইতে ছেদক CDE টানা হইল ; যদি $DE = c$ হয়, প্রমাণ কর যে CDর দৈর্ঘ্য নিম্নলিখিত দ্বিঘাত সমীকরণের মূল হইতে জানা যায়,—

$$x^2 + cx - b(a + b) = 0.$$

২০। XY রেখার উপর একটি অর্ধবৃত্ত অঙ্কিত কর। XP ও YQ দুইটি জ্যা S বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর $XY^2 = XP.XS + YQ.YS$

২১। কোন বৃত্তের বহিঃস্থ P একটি বিন্দু। P হইতে অঙ্কিত একটি সরলরেখা বৃত্তকে C ও D বিন্দুতে ছেদ করে। বৃত্তের একটি ব্যাস ABর উপর PM লম্ব। প্রমাণ কর

$$PM^2 = PC.PD + AM.MB$$

২২। দুইটি বৃত্ত B ও C বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করে। AE ও DF ঐ বৃত্তদ্বয়ের সরল সাধারণ স্পর্শক। বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ জ্যা বর্ধিত হইলে AE ও DF কে G ও H বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর $GH^2 = AE^2 + BC^2$

২৩। একটি বৃত্তের বহিঃস্থ যে কোন বিন্দু P হইতে দুইটি স্পর্শক PT_1, PT_2 টানা হইল। O বৃত্তের কেন্দ্র এবং r ইহার ব্যাসার্ধের পরিমাণ। OP স্পর্শবিন্দুজ্যা T_1T_2 কে Q বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর $OP.\ OQ = r^2$

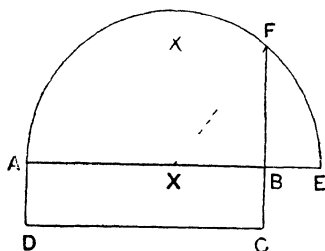
২৪। AB একটি বৃত্তের স্থির ব্যাস এবং XY এই ব্যাসের উপর লম্ব। A হইতে অঙ্কিত সরলরেখা XYকে P ও বৃত্তটিকে Q বিন্দুতে ছেদ করিলে $AP.AQ$ ধ্রুবক হইবে।

পঞ্চম অধ্যায়

বর্গক্ষেত্র অঙ্কন, মাধ্যমিক ছেদ

সম্পাদ্য ২৮ (Problem 28)

কোন নির্দিষ্ট আয়তক্ষেত্রের সমান এক বর্গক্ষেত্র অঙ্কন করিতে হইবে।

[To draw a square equal in area to a given rectangle]

ABCD আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান এক বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। ABকে E বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত কর যেন BE = BC হয়। AE রেখাকে X বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত কর। Xকে কেন্দ্র করিয়া XA ব্যাসার্ধ লইয়া বৃত্ত অঙ্কন কর। CB বাহুকে বর্ধিত কর যেন উহা বৃত্তটিকে F বিন্দুতে ছেদ করে।

তাহা হইলে BF নির্ণেয় বর্গক্ষেত্রের একটি বাহু হইল।

প্রমাণ। XF যোগ কর।

∵ XF, XFB সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ,

∴ $XF^2 = BF^2 + XB^2$,

সুতরাং, $BF^2 = XF^2 - XB^2$

$= XA^2 - XB^2$

$= (XA + XB)(XA - XB)$

$= AB(XE - XB)$

$= AB.BE = AB.BC$।

বিকল্প প্রমাণ। BC কে উভয়দিকে বর্ধিত করিয়া অঙ্কিত বৃত্তটিকে F ও G বিন্দুতে ছেদ কর, তাহা হইলে BF = BG হইবে।

এখন $AB.\,BC = AB.\,BF$
$= FB.\,GB$ (উপ. ৫৫)
$= FB^2$

দ্রষ্টব্য। যে কোন ঋজুরেখক্ষেত্রকে সমান বর্গক্ষেত্রে পবিণত করিতে হইলে কয়েক ধাপে তাহা সম্পাদন করা যায়; যথা—

(১) ঐ ঋজুরেখক্ষেত্রের সমান একটি ত্রিভুজ অঙ্কন কর, [সম্পাদ্য ১৫, মন্তব্য (ক)]

(২) ঐ ত্রিভুজের সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি আয়তক্ষেত্র অঙ্কন কর; [সম্পাদ্য ১৪]

এবং (৩) ঐ আয়তক্ষেত্রের সমান বর্গক্ষেত্র অঙ্কন কর। [সম্পাদ্য ২৮]

৯৪। বর্গমূল নির্ণয়

উক্ত সম্পাদ্যের অঙ্কন হইতে যে কোন সংখ্যাব বর্গমূল জানা যায়। ধব, $\sqrt{7}$ জানিতে হইবে। $\sqrt{7} = \sqrt{7.1}$; অর্থাৎ, AB = 7 একক, BE = 1 একক লও (চিত্র, ৩০০)। AE = 8 একক হইল। অর্থাৎ, AFEর ব্যাস = 8 একক। BF মাপ, উহাই $\sqrt{7}$এব মাপ হইবে।

অনুশীলনী ৬৯

১। নিম্নলিখিত ঋজুরেখক্ষেত্রগুলির প্রত্যেককে সমান বর্গক্ষেত্রে পরিণত কর—

(ক) একটি আয়তক্ষেত্র; সন্নিহিত বাহু 2″ এবং 3″

(খ) একটি সমবাহু ত্রিভুজ; প্রতি বাহু 2″

(গ) ABC ত্রিভুজ $\angle A = 90°$, AB = AC = 2″

(ঘ) একটি ত্রিভুজ; বাহুগুলি—2·5″, 4″, 2″

(ঙ) একটি সামান্তরিক, সন্নিহিত বাহু 2″ ও 3″, অন্তর্ভুক্ত কোণ 50°

(চ) একটি ট্রাপিজিয়ম, সমান্তরাল বাহু 2″, 2·8″, উন্নতি 1″

(ছ) ABCD চতুর্ভুজ AB = 2·5″, BC = 2″, CD = 2″, DA = 1·5″, BD = 2″

(জ) ABCD চতুর্ভুজ, যাহার $AC \perp BD$, AC = 2″, BD = 3″

(ঝ) একটি সুষম ষড়ভুজ; একটি ভুজ = 1″

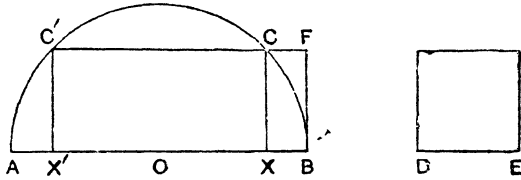
২। জ্যামিতিক অঙ্কন সাহায্যে $\sqrt{ab}$র মান নির্ণয় কর (a, b দুইটি নির্দিষ্ট সংখ্যা)।

৩। জ্যামিতিক অঙ্কন দ্বারা নিম্নলিখিত করণী (surd) গুলির মান নির্ণয় কর।

(১) $\sqrt{5}$, (২) $\sqrt{10}$, (৩) $\sqrt{21}$, (৪) $\sqrt{35}$, (৫) $\sqrt{\cdot 6}$

সম্পাদ্য ২৯ (Problem 29)

একটি সরল রেখাকে এরূপভাবে অন্তর্বিভক্ত কর যেন উহার অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র একটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের সমান হয়।

[To divide a line internally into two parts so that the rectangle contained by the parts may be equal in area to a given square.]

DE নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের একটি বাহু, AB রেখাকে কোন X বিন্দুতে অন্তর্বিভক্ত করিতে হইবে—যেন $AX. BX = DE^2$ হয়।

অঙ্কন। AB কে ব্যাস ধরিয়া অর্ধবৃত্ত অঙ্কন কর। ধর, O ইহার কেন্দ্র। B বিন্দুতে ABর উপর BF লম্ব অঙ্কন কর: DEর সমান করিয়া BF কাটিয়া লও।

F হইতে BA এর সমান্তরাল করিয়া FCC′ রেখা অঙ্কন কর। ধর, ইহা অর্ধবৃত্তকে C, C′ বিন্দুতে ছেদ করিল।

C, C′ হইতে AB উপর CX, C′X′ লম্বদ্বয় টান।

তাহা হইলে AB রেখা X (এবং X′) বিন্দুতে বিভক্ত হইল।

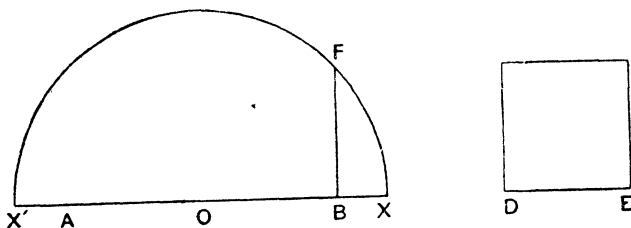
প্রমাণ। $AX.XB = CX^2$ (২৮ সম্পাদ্য)

$= BF^2 = DE^2$।

অনুরূপে, $AX'.X'B = DE^2$।

সম্পাদ্য ৩০ (Problem 30)

একটি সরলরেখাকে এরূপ ভাবে বহির্বিভক্ত কর যেন উহার অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র একটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের সমান হয়

[To divide a line externally into two parts so that the rectangle contained by the parts may be equal in area to a given square.]

চিত্র ৩০২

DE নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের একটি বাহু ; AB রেখাকে কোন X বিন্দুতে বহির্বিভক্ত করিতে হইবে যেন $AX.BX = DE^2$ হয়।

অঙ্কন। B বিন্দুতে BF লম্ব অঙ্কন কর ; BFকে DEর সমান করিয়া কাটিয়া লও।

ধর, O ABর মধ্যবিন্দু। Oকে কেন্দ্র করিয়া OF ব্যাসার্ধ লইয়া ABর একদিকে অর্ধবৃত্ত অঙ্কন কর। ABকে দুই দিকে বর্ধিত করিলে মনে কর X, X′ বিন্দুতে বৃত্তটি ছেদিত হইল।

তাহা হইলে AB রেখা X (এবং X′) বিন্দুতে বহির্বিভক্ত হইল।

প্রমাণ। $AX.XB = X'B.BX$ ($\because X'B = XA$)

$= BF^2$ (২৮. সম্পাদ্য)

$= DE^2$।

পুনশ্চ $BX'.X'A = AX.XB = DE^2$।

৯৫। দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান

২৯. ও ৩০. সম্পাদ্যের জ্যামিতিক অঙ্কন প্রণালী হইতে দ্বিঘাত সমীকরণের (Quadratic equation) সমাধান করা যাইতে পারে। নিম্নে দুইটি সমীকরণ আলোচিত হইল।

(ক) $x^2 - 7x + 12 = 0$

ইহাকে এইরূপে লেখা যায়, $7x - x^2 = 12$, বা $x(7-x) = 12$। অতএব দেখা যায় যে, x ও $7-x$ সংখ্যা দুইটি এরূপ যে উহাদের **সমষ্টি** 7 এবং **গুণফল**

12। অঙ্কন সাহায্যে, ২৯. সম্পাদ্য হইতে জানা যায় যে AB = 7 একক এবং BF = $\sqrt{12}$ (২৪. অনুচ্ছেদে বর্গমূল জানিবার জ্যামিতিক উপায় দেখান হইয়াছে)। AX, XB সমীকরণটির মূল হইবে। (যথা 3, 4)

(খ) $x^2 - x - 12 = 0$

ইহাকে এইরূপে লেখা যায় $x^2 - x = 12$, বা $x(x-1) = 12$।

এখানে দেখা যায় যে, x ও $x-1$ সংখ্যা দুইটি এরূপ যে উহাদের **অন্তর** 1 এবং **গুণফল** 12। অঙ্কন সাহয্যে, ৩০. সম্পাদ্য হইতে জানা যায় যে AB = 1 একক এবং BF = $\sqrt{12}$। চিত্রে AX, XB সমীকরণটির মূল হইবে (যথা 4, −3)।

অনুশীলনী ৭০

১। জ্যামিতির সাহায্যে এরূপ দুইটি সংখ্যা নির্ণয় কর যাহাদের সমষ্টি a একক এবং গুণফল b^2 বর্গএকক।

২। জ্যামিতির সাহায্যে দুইটি সংখ্যা নির্ণয় কর যাহাদের সমষ্টি 9 এবং গুণফল (১) 9, (২) 4, (৩) $2\frac{1}{4}$

অতঃপর নিম্নলিখিত দ্বিঘাত সমীকরণগুলির মূল নির্ণয় কর—

(ক) $x^2 - 9x + 9 = 0$

(খ) $x^2 + 9x + 4 = 0$

(গ) $4x^2 - 36x + 9 = 0$

৩। জ্যামিতির অঙ্কন সাহায্যে এরূপ দুইটি সংখ্যা নির্ণয় কর যাহাদের অন্তরফল a একক এবং গুণফল b^2 বর্গ একক।

৪। জ্যামিতির সাহায্যে দুইটি সংখ্যা নির্ণয় কর যাহাদের অন্তরফল 5 এবং গুণফল (১) 9, (২) 4, (৩) $2\frac{1}{4}$

অতঃপর নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি সমাধান কর—

(ক) $x^2 - 5x - 9 = 0$

(খ) $x^2 + 5x - 4 = 0$

(গ) $4x^2 - 20x - 9 = 0$

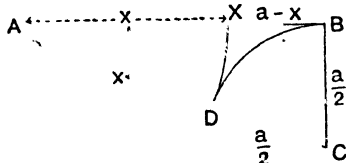
৫। 6 সে. মি. দীর্ঘ AB সরলরেখাকে এমন একটি বিন্দু X এ অন্তর্বিভক্ত কর যেন AX.BX = 6·25 বর্গ সে. মি. হয়। (ক. প্র. ১৯৩৮)

৬। একটি নির্দ্দিষ্ট সরলরেখা ABতে এমন একটি বিন্দু P নির্ণয় কর যেন $AP^2 + PB^2$ = একটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্র হয়।

৭। একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা ABতে এমন একটি বিন্দু P নির্ণয় কর যেন $AP^2 - PB^2$ = একটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্র হয়।

সম্পাদ্য ৩১ (Problem 31)

কোন নির্দিষ্ট সরলরেখাকে এরূপ ভাবে তুইটি অংশে অন্তর্বিভক্ত করিতে হইবে যেন সমগ্র রেখা ও একাংশের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র অপরাংশের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের সমান হয়।

(To divide a straight line *internally* into two parts such that the rectangle contained by the whole line and one part may be equal to the square on the other part.)

চিত্র ৩০৩

AB রেখাকে X বিন্দুতে এরূপ ভাগে অন্তর্বিভক্ত করিতে হইবে যেন

$AB.BX = AX^2$ হয়।

বিশ্লেষণ। মনে কর, $AB = a$ একক, $AX = x$ একক। তাহা হইলে $a(a-x) = x^2$; অর্থাৎ $x^2 + ax = a^2$; অর্থাৎ $(x+\frac{1}{2}a)^2 = a^2 + (\frac{1}{2}a)^2$ হইবে।

অতএব ABC ত্রিভুজের $\angle B$ যদি সমকোণ হয় এবং $BC = \frac{1}{2}a$ লওয়া যায়, তবে অতিভুজ ACর দৈর্ঘ্য $(x+\frac{1}{2}a)$ হইবে।

অঙ্কন। B বিন্দুতে ABর উপর BC লম্ব টান এবং BCর দৈর্ঘ্য ABর অর্ধেক লও। AC যোগ কর। Cকে কেন্দ্র করিয়া CB ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তের চাপ টান; ধর, চাপটি CAকে D বিন্দুতে ছেদ করিল। Aকে কেন্দ্র করিয়া AD ব্যাসার্ধ লইয়া আর একটি চাপ টান; ধর, ইহা ABকে X বিন্দুতে ছেদ করিল।

তাহা হইলে $AB.BX = AX^2$ হইবে।

প্রমাণ। $\because \quad AB^2 + BC^2 = AC^2$,

$\therefore \quad a^2 + (\frac{1}{2}a)^2 = (x+\frac{1}{2}a)^2$,

অর্থাৎ $a^2 = x^2 + ax$,

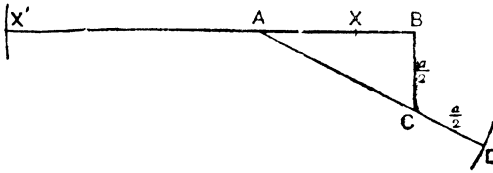
অর্থাৎ $a^2 - ax = x^2$

অর্থাৎ $a(a-x) = x^2$,

$\therefore \quad AB.BX = AX^2$।

উপপাদ্য ৩২ (Problem 32)

কোন নির্দিষ্ট সরলরেখাকে এরূপ ভাবে দুইটি অংশে বহির্বিভক্ত করিতে হইবে যেন সমগ্র রেখা ও একাংশের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র অপরাংশের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের সমান হয়।

(To divide a straight line externally into two parts such that the rectangle contained by the whole line and one part may be equal to the square on the other part.)

চিত্র ৩০৪

AB রেখাকে X′ বিন্দুতে এরূপ ভাবে বহির্বিভক্ত করিতে হইবে যেন $AB.BX' = AX'^2$ হয়।

অঙ্কন। B বিন্দুতে ABর উপর BC লম্ব টান এবং BCর দৈর্ঘ্য ABর অর্ধেক লও। AC যোগ করিয়া বর্ধিত কর। Cকে কেন্দ্র করিয়া CB ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তের চাপ টান; ধর, চাপটি ACর বর্ধিতাংশকে D বিন্দুতে ছেদ করিল। Aকে কেন্দ্র করিয়া AD ব্যাসার্ধ লইয়া আর একটি বৃত্তের চাপ টান; ধর, ইহা BAর বর্ধিতাংশকে X′ বিন্দুতে ছেদ করিল। তাহা হইলে $AB.BX' = AX'^2$ হইবে।

(প্রমাণ, সম্পাদ্য ৩১ এর অনুরূপ)

৯৬। **সংজ্ঞা।** কোন সরলরেখা **মাধ্যমিক** বা **সুবর্ণ ছেদে** (Medial or Golden Section) ছেদিত হইলে বুঝিতে হইবে যে, সমগ্র রেখা ও ছেদিত একাংশের অন্তর্ভূত আয়তক্ষেত্রটি ছেদিত অপরাংশের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের সমান হইবে। সরলরেখাটি অন্তঃস্থ ও বহিঃস্থ উভয়বিধ প্রকারে ছেদিত হইতে পারে, এজন্য মাধ্যমিক ছেদ দুই প্রকারের,—অন্তঃস্থ ও বহিঃস্থ। সম্পাদ্য ৩১ ও ৩২এ AB রেখা যথাক্রমে X ও X′ বিন্দুতে মাধ্যমিক ছেদে বিভক্ত হইয়াছে।

মন্তব্য ১। মাধ্যমিক ছেদ অঙ্কন করিতে পারিলে যে কোন দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান করা যায়। যথা $x^2+ax-a^2=0$ সমীকরণটির ধনমূলটি $\frac{1}{2}a\sqrt{5}-\frac{1}{2}a$ হইল ৩১ সম্পাদ্যের চিত্রে AX এর দৈর্ঘ্য; এবং $x^2-ax-a^2=0$ সমীকরণের ধনমূলটি $\frac{1}{2}a\sqrt{5}+\frac{1}{2}a$ হইল ৩২ সম্পাদের চিত্রে AX′ এর দৈর্ঘ্য; কিংবা $xa+x^2-a^2=0$ সমীকরণের ঋণমূলটির সমান হইল AX′।

মন্তব্য ২। ৩১ ও ৩২ সম্পাদ্যদ্বয়ের চিত্রে ACর দৈর্ঘ্য $=\frac{1}{2}a\sqrt{5}$।

অনুশীলনী ৭১

১। জ্যামিতিক অঙ্কন সাহায্যে নিম্নলিখিত দ্বিঘাত সমীকরণগুলির সমাধান কর :—

(ক) $x^2-5x+3=0$

(খ) $x^2-6x+4=0$

(গ) $5x^2+5x+1=0$

(ঘ) $3x^2-6x+2=0$

২। জ্যামিতিক উপায়ে নিম্নলিখিত সহ-সমীকরণগুলির সমাধান কর :

(ক) $x+y=11$; $xy=30$

(খ) $x+y=17$; $xy=30$

(গ) $x-y=5$; $xy=36$

(ঘ) $x-y=2$; $xy=35$

৩। AB সরলরেখাকে X বিন্দুতে এরূপভাবে অন্তর্বিভক্ত করা হইল যেন $AB.XB=AX^2$ হয়। প্রমাণ কর

$$\frac{AX}{AB}=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$$

৪। AB সরলরেখাকে X′ বিন্দুতে এরূপভাবে বহির্বিভক্ত করা হইল যেন $AB.BX' = AX'^2$ হয়। প্রমাণ কর

$$\frac{AX'}{AB}=\frac{1}{2}\sqrt{(5+1)}$$

৫। কোন নির্দিষ্ট সরলরেখাকে এইরূপ দুইটি অংশে বিভক্ত কর যেন অংশদ্বয়ের বর্গক্ষেত্রের অন্তরফল কোন নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের সমান হয়। অতঃপর সহসমীকরণটি সমাধান কর—

$$x^2-y^2=7,\quad x+y=5।$$

৬। কোন নির্দিষ্ট সরলরেখাকে এইরূপ দুইটি অংশে বিভক্ত কর যেন অংশদ্বয়ের বর্গক্ষেত্রের সমষ্টিফল কোন নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের সমান হয়। অতঃপর সহ-সমীকরণটি সমাধান কর—

$$x^2+y^2=15,\ x+y=5।$$

সম্পাদ্য ৩৩ (Problem 33)

একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে যাহার ভূমিসংলগ্ন কোণদ্বয়ের প্রত্যেকটি শিরঃকোণের দ্বিগুণ।

(To construct an isosceles triangle having each base angle double the vertical angle.)

(ক) প্রথম প্রণালী (ত্রিভুজের সমান বাহুদ্বয়ের একটিকে উপাত্ত ধরিয়া)

চিত্র ৩০৫

মনে কর, AB সরলরেখা নির্ণেয় ত্রিভুজের সমবাহুদ্বয়ের একটি বাহু।

অঙ্কন। AB রেখাকে D বিন্দুতে এরূপে মাধ্যমিক ছেদে অন্তর্বিভক্ত কর যেন $AB.\ BD = AD^2$ হয় [৩১. সম্পাদ্য]

Aকে কেন্দ্র করিয়া, AB ব্যাসার্ধ ধরিয়া ⊙BCK অঙ্কিত কর।

এখন, Bকে কেন্দ্র করিয়া AD এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তের চাপ অঙ্কন কর ; ধর, চাপটি ⊙BCKকে C বিন্দুতে ছেদ করিল। BC যোগ কর ; ইহা ⊙BCKর একটি জ্যা হইল। AC যোগ কর।

তাহা হইলে ABC নির্ণেয় ত্রিভুজ হইবে।

প্রমাণ। DC যোগ কর, এবং A, D, C এই তিন বিন্দুগামী বৃত্তটি অঙ্কিত কর।

এখন, $\because$ $BA.BD = AD^2 = BC^2$ (অঙ্কন),

$\therefore$ BC রেখা, $\odot$ADCকে C বিন্দুতে স্পর্শ করিবে (৫৬. উপঃ ২. অনু.)

$\therefore$ $\angle BCD$ = একান্তর বৃত্তাংশস্থ $\angle DAC$।

সুতরাং, $\angle BCD + \angle DCA = \angle DAC + \angle DCA$

= বহিঃস্থ $\angle BDC$;

$\therefore$ $\angle BDC = \angle ACB = \angle ABC$ ($\because AC = AB$)

$\therefore$ $CD = CB = AD$ (অঙ্কন),

$\therefore$ $\angle DAC = \angle DCA$,

$\therefore$ $\angle BDC = \angle DAC + \angle DCA = 2\angle DAC$,

$\therefore$ $\angle ABC = \angle ACB = 2\angle BAC$;

অর্থাৎ, ভূমিসংলগ্ন কোণের প্রত্যেকটি শিরঃকোণের দ্বিগুণ।

(খ) দ্বিতীয় প্রণালী (ত্রিভুজের ভূমিকে উপাত্ত ধরিয়া)

চিত্র ৩০৬

DE রেখার সমান ভূমির উপর একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে যাহার প্রত্যেক ভূমিসংলগ্ন কোণ শিরঃকোণের দ্বিগুণ হইবে।

অঙ্কন। DE কে ব্যাস করিয়া বৃত্তাঙ্কন কর। D বিন্দুতে DC স্পর্শক টান যেন DC = DE হয়। C হইতে CFA ছেদকটি টান যেন বৃত্তের কেন্দ্রকে ভেদ করিয়া যায়। F ও C কে কেন্দ্র করিয়া DEর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি বৃত্তের চাপ অঙ্কন কর; ধর, তাহারা B বিন্দুতে ছেদ করিল। AB, BC যোগ কর।

তাহা হইলে ABC নির্ণেয় ত্রিভুজ অঙ্কিত হইল।

প্রমাণ। BF যোগ কর।

$\because$ CD, $\odot$ADF এর স্পর্শক, $\therefore$ $CD^2 = CF.CA$; (উপ. ৫৬]

কিন্তু $CD = DE = CB$, $\therefore$ $CB^2 = CF.CA$;

$\therefore$ CB, $\odot$ABF এর স্পর্শক হইল।

পুনশ্চ, BF সেই বৃত্তেরই একটি জ্যা, $\therefore$ $\angle CBF$ = একান্তর $\angle A$।

পুনশ্চ, $\therefore$ $\triangle ABF$ এর $FB = DE = FA$, $\therefore$ $\angle FBA = \angle A$,

অতএব, $\angle CBA = 2\angle A$।

পুনশ্চ, $\triangle ABF$ এর বহিঃস্থ $\angle BFC = \angle A + \angle FBA = 2\angle A$;

এবং, $\triangle BFC$ এর $\angle C = \angle BFC$ ($\because$ $BF = BC$) ;

অতএব, $\angle BCA = 2\angle A$।

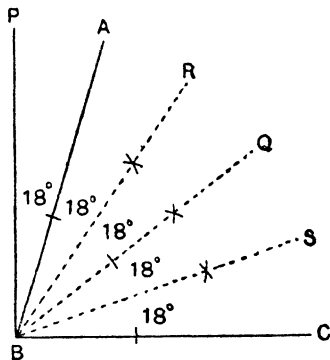
অনু. ১। (চিত্র ৩০৫ দেখ) যেহেতু $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$, এবং $\angle B = \angle C = 2\angle A$, $\therefore$ $\angle B = \angle C = 72°$ এবং $\angle A = 36°$।

অনু. ২। কোন বৃত্তে **সুষম দশভুজ** (regular decagon) অন্তর্লিখিত করিবার সংকেত এই সম্পাদ্য হইতে পাওয়া যায়। কারণ, অন্তর্লিখিত সুষম দশভুজের প্রতিবাহুর সম্মুখীন কেন্দ্রস্থ কোণ 36° এবং চিত্র ৩০৫ এ $\angle BAC = 36°$। সুতরাং ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের BC বাহু BCK বৃত্তে অন্তর্লিখিত সুষম দশভুজের একটি বাহু হইবে।

অনু. ২। কোন বৃত্তে **সুষমপঞ্চভুজ** (regular pentagon) অন্তর্লিখিত করিবার প্রণালীও এই সম্পাদ্য হইতে পাওয়া যায়। কারণ উক্ত প্রকার সুষম পঞ্চভুজের প্রতিবাহুর সম্মুখস্থ কেন্দ্রস্থ কোণ 72°। চিত্র ৩০৫ এ $\angle BAC = 36°$; সুতরাং কোন বৃত্তের কেন্দ্রবিন্দু Aতে $\angle BAC = 36°$ অঙ্কন করিয়া, আর একটি কোণ $CAP = 36°$ অঙ্কন করিলেই $\angle BAP = 72°$ হইবে। BP (P বৃত্তস্থ বিন্দু) যোগ করিলেই ইহা অন্তর্লিখিত সুষম পঞ্চভুজের একটি বাহু হইবে।

অনু. ৩। একটি 18° পরিমাণ কোণ অঙ্কিত করিতে হইবে। চিত্র ৩০৫ এর $\triangle ABC$ সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কন করিলে ইহার $\angle A = 36°$ হইবে ; এই $\angle A$ কে সমদ্বিখণ্ডিত করিলেই একটি 18° কোণ অঙ্কিত হইবে।

অনু ৪। একটি সমকোণকে সমান পাঁচ ভাগে বিভক্ত করিতে হইলে পাঁচটি 18° কোণ অঙ্কন করা আবশ্যক, কারণ $5 \times 18^\circ = 90^\circ$। অতএব $\angle ABC = 72^\circ$ কে BQ দ্বারা দ্বিখণ্ডিত করিলে $\angle ABQ = \angle CBQ = 36^\circ$ হইল, পুনশ্চ $\angle ABQ$ কে BR দ্বাবা, এবং $\angle CBQ$ কে BS দ্বাবা দ্বিখণ্ডিত কর।

$\therefore \angle PBA = \angle ABR = \angle RBQ = \angle QBS = \angle SBC = 18^\circ$। (পার্শ্বচিত্র)

চিত্র ৩০৭

* * কোন বৃত্তে সুষম পঞ্চভুজ অন্তর্লিখিত করিবার বিকল্প প্রণালী।
* (বর্ণনা অনুসারে চিত্র আঁকিতে হইবে)

ACB একটি বৃত্ত; ইহার কেন্দ্র O। AOB ও COD দুইটি ব্যাস পরস্পরে সমকোণে নত করিয়া অঙ্কিত কর। AO কে X বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর। X বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া XC ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ অঙ্কিত কর। মনে কর, এই বৃত্তচাপ OB কে D বিন্দুতে ছেদ করে। CD যোগ কর। Cকে কেন্দ্র করিয়া CD ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ অঙ্কিত করিয়া বৃত্তটিকে E বিন্দুতে ছেদ কর। CE যোগ কর। CE অন্তর্লিখিত পঞ্চভুজের একটি বাহু হইবে। [ইহার প্রমাণ ত্রিকোণমিতিসাপেক্ষ বলিয়া প্রদত্ত হইল না, কিন্তু ইহার অঙ্কন প্রণালীর সরলতা ও সৌকর্য্য মনোজ্ঞ।]

অনুশীলনী ৭২

১। AB রেখা X বিন্দুতে মাধ্যমিক ছেদে অন্তর্বিভক্ত হইলে যদি AX বৃহত্তর ভাগটি হয় তবে প্রমাণ কর

(ক) $(AX + XB)(AX - XB) = AX.\ XB$

(খ) $AB^2 + BX^2 = 3AX^2$

২। AB রেখা C বিন্দুতে ছেদিত হইয়াছে যাহাতে $AB.\ CB = AC^2$ হয়, এবং CA হইতে CD অংশ ছেদিত হইয়াছে যাহাতে $CD = CB$ হয়। প্রমাণ কর $CA.\ DA = CD^2$

৩। C বিন্দু AB রেখাকে ছেদ করিল যেন $AB.\ CB = AC^2$, যদি BA কে D বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করা যায় যাহাতে $BD = 3\ BC$ হয়, প্রমাণ কর $BC^2 = BA.\ AD$।

৪। ৩৩ সম্পাদ্যের চিত্রে প্রমাণ কর $BC/AB = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$।

৫। একটি বৃত্তের কোন ব্যাসার্ধ মাধ্যমিক ছেদে অন্তর্বিভক্ত হইলে ইহার বৃহত্তর অংশটি ঐ বৃত্তে অন্তর্লিখিত সুষম দশভুজের বাহুর সমান হইবে।

(If a radius of a circle is divided internally in medial section, the greater segment is equal to a side of the inscribed regular decagon)

৬। কোন বৃত্তে একটি সুষম 15-ভুজ অঙ্কিত কর।

সংকেত। বৃত্তস্থ কোন বিন্দু A তে অন্তর্লিখিত সমবাহু ত্রিভুজের বাহু AC ও সুষম পঞ্চভুজের বাহু AB অঙ্কিত কর। চাপ BC কে D বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর; BD ও DC অন্তর্লিখিত 15-ভুজের দুইটি বাহু হইবে।

ষষ্ঠ অধ্যায়

বিবিধ বৃত্তাঙ্কন

৯৭। এই পুস্তকের তৃতীয়খণ্ডে কয়েকটি বৃত্তাঙ্কন প্রণালী প্রদর্শিত হইয়াছে। এক্ষণে এই ভাগের বিষয়ীভূত কতকগুলি বৃত্তবিষয়ক ধর্ম অতিরিক্ত সংস্থষ্ট হওয়ায় কয়েকটি অতিরিক্ত অঙ্কন দেখান গেল।

১। দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু A, B দিয়া যাইবে, এবং একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা CDকে স্পর্শ করিবে এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কন করিতে হইবে

[To construct a circle to pass through two given points A, B and to touch a given straight line CD.]

চিত্র ৩০৮

বিশ্লেষণ। AB যোগ করিয়া বর্ধিত কর।

ধর, AB, CD কে O বিন্দুতে ছেদ করিল। A ও Bর মধ্য দিয়া যে কোন একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর, এবং ধর, OP ইহার একটি স্পর্শক। তাহা হইলে $OP^2 = OA.\ OB =$ একটি নির্দিষ্ট মান (যত বৃত্তই A ও B দিয়া অঙ্কিত করা যাইবে) হইল। [৫৬. সম্পাদ্য]

অঙ্কন। AB যোগ কর। BAকে বর্ধিত কর; ধর, DCকে ইহা O বিন্দুতে ছেদ করিল। A ও Bর মধ্য দিয়া যে কোন বৃত্ত অঙ্কন কর। এই বৃত্তে একটি স্পর্শক OP টান। OPর সমান করিয়া OC ও OD হইতে যথাক্রমে OT ও OT′ অংশদ্বয় কর্তন কর।

তাহা হইলে ABT ও BAT′ এই দুইটি বৃত্ত নির্ণেয় বৃত্ত হইবে।

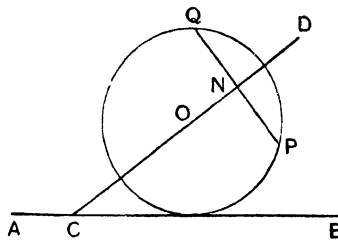
প্রমাণ। প্রথম সর্ত হিসাবে A, B দিয়া যত বৃত্তই যাইবে তাহাদের কেন্দ্র-গুলি ABর লম্ব দ্বিখণ্ডকের উপর থাকিবে ; কিন্তু ইহাদের মধ্যে অনেকগুলি আবার CD রেখাকে স্পর্শ করিবে না। দ্বিতীয় সর্ত স্বতন্ত্ররূপে পূরণ করিবে সেই বৃত্ত গুলি, যাহাদের কেন্দ্র CDর উপর T ও T′ বিন্দুতে লম্বদ্বয়ের উপর থাকিবে ; কিন্তু, ইহাদের মধ্যে অনেকেই A, B দিয়া যাইবে না। সুতরাং, ABর লম্ব দ্বিখণ্ডক এবং T বিন্দুতে (অথবা T′ বিন্দুতে) CDর উপর লম্ব, ইহারা যে বিন্দুতে ছেদ করিবে, সেই বিন্দুই উদ্দিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র ; কারণ, ইহাতে দুইটি সর্তই পূর্ণ হইল।

অতএব, এইরূপ দুইটি বৃত্ত অঙ্কিত হইতে পারে।

দ্রষ্টব্য। পূর্বোক্ত অঙ্কন ব্যর্থ হইবে যদি AB ‖ CD হয়। এক্ষেত্রে অঙ্কনটি কিরূপ হইবে নির্ধারণ কর।

২। একটি নির্দিষ্ট বিন্দু P দিয়া যাইবে, নির্দিষ্ট AB রেখাকে স্পর্শ করিবে, এবং কোন নির্দিষ্ট CD রেখার উপর কেন্দ্র থাকিবে এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কন কর।

[To construct a circle, with its centre on a given straight line to pass through a given point, and to touch a given straight line.]

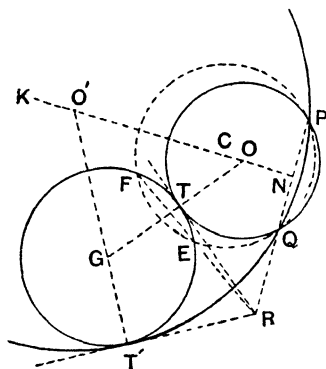
অঙ্কন। P বিন্দু হইতে CDর উপরPN লম্ব টান, এবং PNবর্ধিত কর যেন QN = PN হয়। পরবর্তী অঙ্কন (১) সম্পাদ্যের অনুরূপ।

চিত্র ৩০৯

৩। এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কন কর যাহা দুইটি নিদিষ্ট বিন্দু P, Q দিয়া যাইবে এবং একটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে (কেন্দ্র G) স্পর্শ করিবে।

(Describe a circle which shall pass through two given points ***P Q***, and touch a given circle, centre ***G***.)

অঙ্কন। PQসংযুক্ত কর PQ এর লম্ব দ্বিখণ্ডক NK টান। এই লম্বের উপর যে কোন C বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া বৃত্ত অঙ্কন করিলে নির্দিষ্ট বৃত্তকে E, F বিন্দুতে ছেদ করিবে।

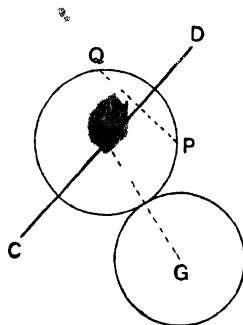
FE বর্ধিত কর; ধর, উহা PQএর বর্ধিতাংশকে Rবিন্দুতে ছেদ করিল। R হইতে নির্দিষ্ট বৃত্তে RT (বা RT′) স্পর্শক টান।

GT (বা T′G)কে বর্ধিত করিলে NK-লম্বকে O (বাO′)বিন্দুতে ছেদ করিবে। তাহা হইলে O (বা O′) উদ্দিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র।

চিত্র ৩১০

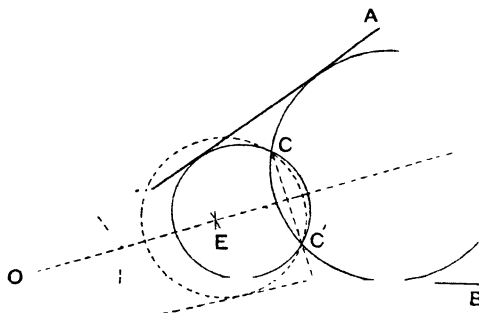
প্রমাণ। $\because$ $RT^2 = RE.RF = RQ.RP$, $\therefore$ P, Q, T মধ্য-গামী বৃত্ত RT কে T বিন্দুতে স্পর্শ করিবে এবং, সুতরাং নির্দিষ্ট বৃত্তকেও T বিন্দুকে স্পর্শ করিবে। কাজেই, উদ্দিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র GTর বর্ধিতাংশে থাকিবে; এবং, উহা NKর উপর থাকায়, O বিন্দুটি (কিংবা O′) নির্ণেয় বৃত্তের কেন্দ্র।

৪। একটি নির্দিষ্ট বিন্দু P দিয়া যাইবে, একটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে (যাহার কেন্দ্র G) স্পর্শ করিবে, এবং কোন নির্দিষ্ট সরলরেখা CDর উপর কেন্দ্র থাকিবে এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কন করিত হইবে।

[To describe a circle which shall have its centre on a given line, pass through a given point, and touch given circle.)

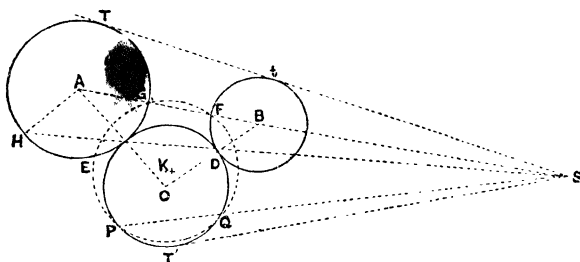
অঙ্কন। P হইতে CDর উপর লম্ব PN পাতিত কর, এবং PNকে Q পর্যন্ত বর্ধিত কর যেন QN = PN হয় পরবর্তী অঙ্কন (৩) অনুরূপ।

চিত্র ৩১১

৫। কোন নির্দিষ্ট বিন্দু C দিয়া যাইবে, এবং দুইটি নির্দিষ্ট সরলরেখা OA, OB কে স্পর্শ করিবে এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে।

(To describe a circle to touch two given straight lines and pass through a given point.)

বিশ্লেষণ। ধর, E উদ্দিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র; ∴ OE, ∠AOBর দ্বিখণ্ডক। পুনরায় C′ যদি C বিন্দুর বিম্ব হয় (OE রেখা সম্পর্কে), তবে C′ উক্ত বৃত্তের উপর থাকিবে।

অতএব, C ও C′ বিন্দু দিয়া যাইবে, এবং OA (বা OB) কে স্পর্শ করিবে এরূপ বৃত্ত অঙ্কন করিতে হইবে। [(১) সম্পাদ্য দ্রষ্টব্য]।

৬। দুইটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে (কেন্দ্রদ্বয় A, B) স্পর্শ করিবে ও একটি বিন্দু P দিয়া যাইবে এরূপ বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To describe a circle to touch two given circles and pass through a given point.]

চিত্র ৩:৩

অঙ্কন। নির্দিষ্ট বৃত্ত দুইটির একটি সাধারণ স্পর্শক Tt অঙ্কিত কর ; ধর, কেন্দ্ররেখা AB কে ইহা S বিন্দুতে ছেদ করিল। PS সংযুক্ত কর। G, F ও P বিন্দু দিয়া বৃত্তটি অঙ্কিত কর : ধর, ইহা PSকে Q বিন্দুতে ছেদ করিল। অতঃপর, (৩) সম্পাদ্য অনুসারে P,Q বিন্দু মধ্য দিয়া যাইবে ও একটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে (কেন্দ্র B) স্পর্শ করিবে এরূপ বৃত্ত অঙ্কন কর। ধর, ইহা অঙ্কিত হইল, এবং D বৃত্তদ্বয়ের স্পর্শবিন্দু হইল। (এইরূপ দুইটি বৃত্ত অঙ্কিত হইতে পারে)।

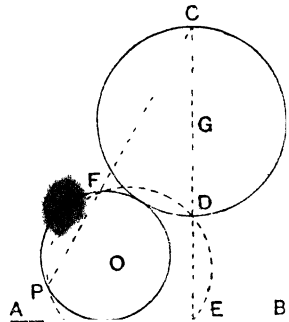
তাহা হইলে এই উদ্দিষ্ট বৃত্তটি অপর নির্দিষ্ট বৃত্তকে (কেন্দ্র A) স্পর্শ করিবে।

দ্রষ্টব্য। চিত্রে সরল সাধারণ স্পর্শক প্রদর্শিত হইয়াছে ; তির্য্যক সাধারণ অঙ্কন করিলে ABকে যদি S′ বিন্দুতে ছেদ করে, তবে অনুরূপ অঙ্কন সাহায্যে অপর দুইটি বৃত্ত অঙ্কিত হইতে পারে।

৭। কোন নির্দিষ্ট বৃত্তকে (কেন্দ্র G) ও নির্দিষ্ট সরলরেখা (AB) কে স্পর্শ করিবে এবং একটি স্থির বিন্দু (P) দিয়া যাইবে এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কন করিতে হইবে।

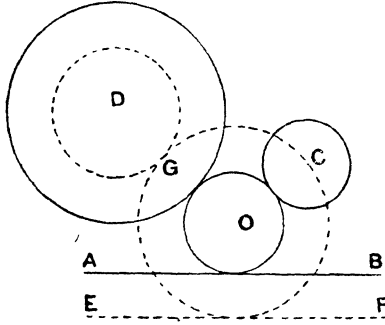
(To describe a circle which shall touch a given circle and a given straight line and pass through a given point.)

অঙ্কন। ABর উপর GE লম্ব টান। ধর, ইহা নির্দিষ্ট বৃত্তকে C, D বিন্দুতে ছেদ করিল। CP যোগ কর।

P, D, E বিন্দুত্রয়ের মধ্য দিয়া বৃত্তটি অঙ্কন কর ; ধর, ইহা CPকে F বিন্দুতে ছেদ করিল। অতঃপর, (৩) সম্পাদ্যের অঙ্কন সাহায্যে একটি বৃত্ত অঙ্কন কর, যাহা P, F বিন্দুদ্বয়ের মধ্যগামী হইয়া ABকে স্পর্শ করিবে। (এইরূপ অপর একটি বৃত্ত অঙ্কিত হইবে)।

চিত্র ৩১৪

দ্রষ্টব্য। DP যোগ করিয়া পূর্ব্বোক্ত অনুরূপ অঙ্কন সাহায্যে অধিকন্তু দুইটি বৃত্ত অঙ্কিত হইতে পারে।

৮। দুইটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে (কেন্দ্র, C ও D) এবং একটি সরল-রেখাকে (AB) স্পর্শ করিবে এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কন করিতে হইবে।

[To describe a circle which shall touch a given line and two given circles.]

চিত্র ৩১৫

অঙ্কন। EF ll AB করিয়া টান যেন উভয়ের দূরত্ব = C-কেন্দ্র বৃত্তের ব্যাসার্ধ হয় (অপর বৃত্তের ব্যাসার্ধও লইয়া যাইতে পারে)। নির্দিষ্ট বৃত্তদ্বয়ের ব্যাসার্ধের অন্তরফলকে ব্যাসার্ধ লইয়া এবং Dকে কেন্দ্র করিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কন কর।

এই শেষোক্ত অঙ্কিত বৃত্তকে স্পর্শ করিবে, EFকে স্পর্শ করিবে, এবং C কেন্দ্রগামী হইবে এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কন কর [(৭) সম্পাদ্য, দ্রষ্টব্য]; ধর, O ইহার কেন্দ্র হইল। OC যোগ কর। ধর, C-কেন্দ্র বৃত্তটি ইহা দ্বারা G বিন্দুতে ছেদিত হইল। তাহা হইলে, Oকে কেন্দ্র করিয়া এবং OG ব্যাসার্ধ লইয়া যে বৃত্তটি অঙ্কিত হইবে উহা সকল সর্ত পূর্ণ করিবে এবং উদ্দিষ্ট একটি বৃত্ত হইবে।

দ্রষ্টব্য। সাধারণতঃ আটটি সমাধান পাওয়া যাইবে,—চারিটিতে EF রেখা AB রেখার একপার্শ্বে অবস্থিত হইবে এবং অপর চারিটিতে EF, ABর বিপরীত পার্শ্বে থাকিবে।

৯। তিনটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে (যাহাদের কেন্দ্র A, B, C) স্পর্শ করিবে এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে।

(To describe a circle to touch three given circles.)

চিত্র ৩১৬

মনে, কর A-কেন্দ্র, B-কেন্দ্র ও C-কেন্দ্র বৃত্তের ব্যাসার্ধ যথাক্রমে r_1, r_2, ও r_3 (r_1 ক্ষুদ্রতম)।

অঙ্কন। Bকে কেন্দ্র করিয়া ($r_2 - r_1$) ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কন কর ; এবং Cকে কেন্দ্র করিয়া ($r_3 - r_1$) ব্যাসার্ধ লইয়া অপর একটি বৃত্ত অঙ্কন কর : এখন, A বিন্দু দিয়া যাইবে এবং উক্ত অঙ্কিত বৃত্ত দুইটিকে স্পর্শ করিবে এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কন কর। [(৬) সম্পাদ্য, দ্রষ্টব্য] , মনে কর,O এই শেষোক্ত বৃত্তের কেন্দ্র হইল।

OA, OB, CC যোগ কর ; ধর, ইহাবা বৃত্তগুলিকে যথাক্রমে D, H, G বিন্দুতে ছেদ করিল। তাহা হইলে অঙ্কন হইতে বুঝা গেল যে AD= EG=FH। সুতরাং, Oকে কেন্দ্র করিয়া OD ব্যাসার্ধ লইয়া যে বৃত্তটি অঙ্কিত হইবে তাহা নির্দ্দিষ্ট বৃত্তসমূহকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করিবে।

দ্রষ্টব্য। সাধারণতঃ এইরূপ আটটি সমাধান হইবে। (১) দুইটি বৃত্তকে অন্তঃস্পর্শ ও তৃতীয়টিকে বহিঃস্পর্শ করিবে, এরূপ বৃত্ত তিনটি হইবে ; (২) দুইটি বৃত্তকে বহিঃস্পর্শ ও তৃতীয়টিকে অন্তঃস্পর্শ করিবে, এরূপ বৃত্ত তিনটি হইবে ; (৩) তিনটি বৃত্তকেই অন্তঃস্পর্শ করিবে এরূপ বৃত্ত একটি হইবে ; এবং (৪) তিনটি বৃত্তকেই বহিঃস্পর্শ করিবে (যেমন চিত্রে প্রদর্শিত) এরূপ বৃত্ত একটি

বিবিধ অনুশীলনী (৩)

(ক)

১। A, B, C, D চারিটি বিন্দু সরলরেখার উপর পর্যায়ক্রমে এরূপভাবে অবস্থিত যে $AC^2 = AB.AD$, প্রমাণ কর

$$AB.CD = AC.BC।$$

২। $\triangle ABC$র, AD ও BE দুইটি মধ্যমা; যদি $BC > AC$ হয়, প্রমাণ কর $AD < BE$।

৩। AB, CD কোন বৃত্তের দুইটি জ্যা O বিন্দুতে অন্তর্বিভক্ত হইয়াছে. প্রমাণ কর,

$$AB^2 + CO^2 + OD^2 = CD^2 + AO^2 + OB^2।$$

৪। ABCD একটি ট্রাপিজিয়ম যাহার $AB \parallel DC$, প্রমাণ কর

$$AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2 + 2AB.CD।$$

৫। $\triangle ABC$র ভূমি BO, D ও E বিন্দুতে ত্রিখণ্ডিত হইয়াছে; প্রমাণ কর

$$AB^2 \sim AC^2 = 3(AD^2 \sim AE^2)।$$

৬। AB কোন বৃত্তের ব্যাস; এবং AC, BD দুইটি জ্যা O বিন্দুতে ছেদিত হইয়াছে। প্রমাণ কর

$$BA^2 = AO.AC + BO.BD।$$

৭। ABC ত্রিভুজের $\angle B$ সমকোণ। B হইতে লম্বটি AC বাহুর D বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। $AD = 2DC$ হইলে, প্রমাণ কর $AB^2 = 2BC^2$।

৮। CD কোন বৃত্তের ব্যাস এবং $AB \parallel CD$ ভাবে একটি জ্যা। যদি P, CDর কোন বিন্দু হয়, তবে প্রমাণ কর

$$PA^2 + PB^2 = PC^2 + PD^2।$$

৯। CD কোন বৃত্তের একটি জ্যা। P, CDর সমান্তরাল ব্যাসের উপর একটি বিন্দু। যদি CDর লম্ব ব্যাসের একটি প্রান্তবিন্দু Q হয়, প্রমাণ কর

$$PC^2 + PD^2 = 2PQ^2।$$

১০। $\triangle ABC$র $\angle B = 120^\circ$; প্রমাণ কর

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 + AB.BC।$$

(খ)

১১। ABCD বর্গক্ষেত্রের AC কর্ণকে E পর্য্যন্ত বর্ধিত করা হইল। যদি $CE = BC$ হয়, প্রমাণ কর $BE^2 = AC.AE$।

১২। ACB একটি সরল রেখা; ACর উপর একটি সমবাহু ত্রিভুজ ACD অঙ্কিত করা হইল। প্রমাণ কর

$$DB^2 = AC^2 + CB^2 + AC.CB।$$

১৩। ABCD একটি চতুর্ভুজ এবং $\angle B = 90^\circ$। যদি $AD^2 + 2AB.CD = AB^2 + BC^2 + CD^2$ হয়, প্রমাণ কর $\angle BCD =$ একটি সমকোণ।

১৪। ABCD বৃত্তের AB, CD দুইটি জ্যা পরস্পর লম্ব হইয়া P বিন্দুতে ছেদিত হইয়াছে। O, বৃত্তটির কেন্দ্র। AC, OPর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M, N হয়, প্রমাণ কর

$$2(MN^2 + PM^2) = OA^2 \text{।}$$

১৫। $\triangle ABC$র BC, CA, AB বাহুগুলিকে একটি সরলরেখা XYZ, যথাক্রমে X, Y, Z বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। AYZ, BZX বৃত্তগুলিতে যথাক্রমে AT, BT স্পর্শক টানা হইল। প্রমাণ কর

(ক) BCAT চতুর্ভুজটি বৃত্তস্থ ;
(খ) TC, OCXY এর স্পর্শক।

১৬। ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ (AB = AC); D, BCর উপর যে কোন বিন্দু। প্রমাণ কর $AD^2 + BD.DC = AB^2$।

১৭। ABC ত্রিভুজের $\angle A = 90^\circ$; E, F, যথাক্রমে CA, ABর মধ্যবিন্দু। প্রমাণ কর

$$4(BE^2 + CF^2) = 5BC^2 \text{।}$$

১৮। $\triangle ABC$র ভুমি BCর উপর E এরূপ একটি বিন্দু যে $BE = 2EC$। প্রমাণ কর $AB^2 + 2AC^2 = 6EC^2 + 3AE^2$।

১৯। A, B, C, D চারিটি স্থির বিন্দু, এবং P এরূপ একটি বিন্দু যে $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 =$ একটি নির্দ্দিষ্ট সংখ্যা। প্রমাণ কর P এর সঞ্চারপথ এমন একটি বৃত্ত যাহার কেন্দ্র, AB ও CDর মধ্যবিন্দু সংযোজক রেখা এবং AD ও BCর মধ্যবিন্দু সংযোজক রেখার ছেদবিন্দু।

২০। A ও B দুইটি স্থিরবিন্দু ; P এরূপ একটি বিন্দু যে $PA^2 + PB^2 =$ একটি নির্দ্দিষ্ট সংখ্যা। প্রমাণ কর যে এর সঞ্চারপথ একটি বৃত্ত যাহার কেন্দ্র ABর মধ্যবিন্দু।

(গ)

২১। ABCD বর্গক্ষেত্রের A ও B শীর্ষবিন্দু ও CDর মধ্যবিন্দু দিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত হইল। যদি বৃত্তটি DA রেখাকে O বিন্দুতে ছেদ করে তবে $DA = 4DO$ হইবে।

২২। কোন নির্দ্দিষ্ট রেখাকে এরূপে বিভক্ত কর যে, বিভক্ত অংশদ্বয়ের অন্তর্ভূত আয়তক্ষেত্র বৃহত্তম হইবে।

২৩। কোন বৃত্তের কেন্দ্র C ; AB ইহার একটি জ্যা, এবং P পরিধিস্থ একটি বিন্দু। C হইতে ABর উপর লম্ব, PA কে Q বিন্দুতে এবং PBকে R বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর $CQ.CR = CA^2$।

[সংকেত। $\angle CPQ = \angle PRC$; $\therefore CQ.CR = CP^2$]

২৪। AB, CD কোন বৃত্তের দুইটি জ্যা X বিন্দুতে লম্ব ভাবে ছেদ করিয়াছে। যদি P ও Q, যথাক্রমে AC ও BDর মধ্যবিন্দু, O বৃত্তের কেন্দ্র, এবং r ইহার ব্যাসার্ধ হয়, প্রমাণ কর

$$PQ^2 = 2r^2 - OX^2$$ ।

২৫। ABCD একটি চতুর্ভুজ; O, বিপরীত বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু সংযোজক রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু। যদি a, b, c, d, x, y যথাক্রমে বাহুগুলির ও কর্ণদ্বয়ের দৈর্ঘ্য হয়, প্রমাণ কর
$$OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 = \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + x^2 + y^2)$$

২৬। ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle A = 90$। AD, BCর উপর লম্ব। যদি $AD = p$ ইঞ্চি এবং $CD = 1$ ইঞ্চি হয়, দেখাও যে $BD = p^2$ ইঞ্চি। ABর উপর লম্ব BE যদি বর্ধিত ADকে E বিন্দুতে ছেদ করে, তবে DE কত দীর্ঘ হইবে?

২৭। দুই ইঞ্চি ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিয়া সুষম ষড়ভুজ ABCDEF অন্তর্লিখিত কর; AB ও DC বর্ধিত করিয়া P বিন্দুতে ছেদ করাও। প্রমাণ কর যে $\triangle APD$র ক্ষেত্রফল উক্ত ষড়ভুজের ক্ষেত্রফলের $\frac{2}{3}$ অংশ হইবে। উক্ত ষড়ভুজের ক্ষেত্রফলের সহিত সমান হইবে এমন একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ ADর উপর অঙ্কিত কর।

২৮। একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত। উক্ত ত্রিভুজের সমকৌণিক বিন্দুর সহিত বর্গক্ষেত্রটির দুইটি কৌণিকবিন্দু যোগ করিলে যে দুইটি রেখা হয়, তাহাদের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের অন্তরফল, সমকোণী ত্রিভুজটির বাহুদ্বয়ের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের অন্তরফলের সহিত সমান হইবে।

২৯। দুইটি বৃত্তের (অর r_1 ও r_2) সরল ও তির্যক সাধারণ স্পর্শকদ্বয়ের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে t_1 ও t_2। প্রমাণ কর $t_1^2 - t_2^2 = 4\sqrt{r_1 r_2}$।

৩০। কোন বৃত্তের কেন্দ্র O। বহিঃস্থ একটি বিন্দু P হইতে অঙ্কিত PA উক্ত বৃত্তের স্পর্শক এবং A স্পর্শ বিন্দু। OPকে বর্ধিত করিয়া বর্ধিতাংশে এমন একটি বিন্দু Q নির্দেশ কর যে Q হইতে অঙ্কিত উক্ত বৃত্তের স্পর্শক PA স্পর্শকের দেড়গুণ দীর্ঘ হইবে।

(ঘ)

৩১। O বিন্দুতে পরস্পর সমকোণে নত AB ও CD কোন বৃত্তের দুইটি জ্যা। OP, ACর উপর অঙ্কিত লম্ব। প্রমাণ কর যে, PO বর্ধিত হইলে DBকে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে।

৩২। কোন বৃত্তস্থ (কেন্দ্র O) A, B, C যে কোন তিনটি বিন্দু। A, B ও C হইতে যথাক্রমে AP, BQ, CR যে কোন এক দিকে অঙ্কিত তিনটি সমদীর্ঘ (l একক) সমান্তরাল সরল রেখা। প্রমাণ কর যে P, Q ও R এই বিন্দুত্রয়গামী বৃত্তের কেন্দ্র O হইতে l একক দূরে অবস্থিত থাকিবে।

৩৩। ABC ত্রিভুজটি কোন বৃত্তে এমনভাবে অন্তর্লিখিত যে ইহার কেন্দ্র ABC ত্রিভুজের অভ্যন্তরে অবস্থিত। OB ও OCর সহিত সমান্তরাল করিয়া A হইতে দুইটি সরলরেখা, OC ও OAর সহিত সমান্তরাল করিয়া B হইতে দুইটি সরলরেখা, এইরূপে ছয়টি সরলরেখা অঙ্কিত হইল। প্রমাণ কর যে (১) এই ছয়টি সরলরেখার ছেদে একটি সমবাহু ষড়ভুজ উৎপন্ন হইবে, (২) এই ষড়ভুজের বিপরীত কোণগুলি সমান হইবে এবং (৩) এই ষড়ভুজের প্রত্যেকটি কোণ ABC ত্রিভুজের কোন একটি কোণের দ্বিগুণ হইবে।

৩৪। একটি চাপের উচ্চতা h একক, ইহার অর r = একক, এবং ইহার ভুমিজ্যার দৈর্ঘ্য l একক, প্রমাণ কর $l^2=4h(2r-h)$।

একটি বৃত্তচাপের একটি জ্যা 4 ইঞ্চি ও অর 8 ইঞ্চি হইলে ইহার উচ্চতা কত ?

৩৫। ভূপৃষ্ট হইতে একটি মনুমেণ্টের উচ্চতা h একক। ইহার শিখর বিন্দু হইতে ভূপৃষ্ঠকে স্পর্শ করিয়া একটি স্পর্শক অঙ্কিত হইল। যদি উক্ত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য l একক এবং ভু-এর ব্যাসার্ধ r একক হয়, তবে দেখাও যে $l=\sqrt{h(h+2r)}$।

একটি আলোকস্তম্ভ 800 ফুট উচ্চ। যদি পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 4000 মাইল হয় তবে স্তম্ভস্থিত আলোকরশ্মি কতদূর হইতে দৃষ্টিগোচর হইবে ?

৩৬। একটি বৃত্তচাপের উচ্চতা ইহার 40 ফুট দীর্ঘ জ্যা হইতে 10 ফুট। উক্ত জ্যা হইতে 9 ফুট দূরে অবস্থিত উক্ত চাপের জ্যাটি কত দীর্ঘ হইবে ?

৩৭। আট ইঞ্চি ব্যবধানে অবস্থিত দুইটি বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া 4 ইঞ্চি ও 6 ইঞ্চি ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি বৃত্ত অঙ্কিত হইল। ইহাদের সাধারণ জ্যাটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় করিতে হইবে।

৩৮। ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র I, AI বর্ধিত হইয়া ত্রিভুজের পরিবৃত্তকে Q বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর QI = QB = QC।

৩৯। ABCD বর্গক্ষেত্রের AB ও BC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q। প্রমাণ কর যে ট্রাপিজিয়ম ABQDর ক্ষেত্রফল PQD ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণ হইবে।

(ঙ)

৪০। ABC একটি ত্রিভুজ। $\angle B$ ও $\angle C$ এর সমদ্বিখণ্ডক রেখাদ্বয় CA ও ABকে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে। যদি BP = CQ হয়, তবে প্রমাণ কর ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু।

৪১। একটি সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজ ABCর অতিভুজ BCর মধ্যবিন্দু O। AB স্থিত P ও Q এমন দুইটি বিন্দু যে AP = QB = AO। প্রমাণ কর যে $\frac{1}{2}\angle POQ = \angle AOQ = 22\frac{1}{2}^\circ$। যদি ACর উপর L এমন একটি বিন্দু হয় যে CL = AO তাহা হইলে PQ ও QL একটি সুষম অষ্টভুজের দুইটি বাহু হইবে।

৪২। কোন বৃত্তের AB একটি স্থির জ্যা, এবং PQ যে কোন আর একটি জ্যা ; যদি AP ও BQ, X বিন্দুতে ছেদ করে, তবে X এর সঞ্চার পথ নির্ণয় কর।

৪৩। ABC ত্রিভুজে তিনটি বাহু যথাক্রমে $5''$ $6''$ ও $7''$। A, B ও Cকে কেন্দ্র করিয়া এমন তিনটি বৃত্ত অঙ্কিত কর যাহারা পরস্পরকে স্পর্শ করিবে।

৪৪। ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের AB = AC = a ; ইহার উচ্চতা h ; একটি বৃত্ত AB ও ACকে যথাক্রমে B ও C বিন্দুতে স্পর্শ করে। যদি এই বৃত্তের কেন্দ্র O হয় এবং ব্যাসার্ধ r হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

(১) O, A, B ও C বৃত্তস্থ,

এবং (২) $r^2 = \frac{a^2}{h^2}(a^2 - h^2)$।

৪৫। OX কোন বৃত্তের একটি ব্যাসার্ধ, O ইহার কেন্দ্র, OXএর উপর Y যে কোন একটি বিন্দু। YX এর লম্বদ্বিখণ্ডক বৃত্তকে P বিন্দুতে ছেদ করে এবং P বিন্দুস্থ স্পর্শক বর্ধিত OX কে T বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ কর যে $\angle OPY + 3\angle XPT = 90^\circ$।

৪৬। ABCD একটি চতুর্ভুজ এবং O ইহার অভ্যন্তরস্থ একটি বিন্দু। যদি P, Q, R ও S যথাক্রমে OAB, OBC, OCD ও ODA ত্রিভুজগুলির ভরকেন্দ্র হয়, তবে প্রমাণ কর PQRS একটি সামান্তরিক।

৪৭। একটি ত্রিভুজের একটি বাহু, ইহার বিপরীত কোণ ও অন্তর্বৃত্তের অর দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

৪৮। দুইটি বৃত্ত (কেন্দ্র O এবং O$'$) T বিন্দুতে পরস্পর বহিঃস্পর্শ করিয়াছে। সাধারণ স্পর্শক AB বৃত্ত দুইটিকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে এবং T বিন্দু সাধারণ স্পর্শক ABকে C বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর যে $\angle OCO'$ = এক সমকোণ, এবং $AB^2 = d_1 d_2$ (d_1 ও d_2 বৃত্তদ্বয়ের দুইটি ব্যাস)।

৪৯। একটি ত্রিভুজের নিম্নলিখিত বিশেষ বিন্দুত্রয়ের অবস্থান নির্দিষ্ট আছে; ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

(১) তিনটি লম্বপাদবিন্দু।

(২) একটি শীর্ষবিন্দু, পরিকেন্দ্র ও লম্বকেন্দ্র।

(৩) তিনটি বহিঃকেন্দ্র।

(৪) পরিকেন্দ্র, অন্তঃকেন্দ্র ও একটি বহিঃকেন্দ্র।

৫০। একটি বৃত্তে AB ও CD দুইটি ব্যাস পরস্পর সমকোণে নত। AC চাপের উপর যে কোন বিন্দু P ; প্রমাণ কর $PB^2 - PA^2 = 4\Delta GPD$।

— সমাপ্ত —

স্মারক পত্র

[অধ্যয়ন কালে অনেক কিছু প্রয়োজনীয় বিষয় ছাত্রদের নোট্ করিয়া রাখিতে হয় ; এজন্য পরবর্তী কয়েকটি পৃষ্ঠা ফাঁকা রাখা হইল।]

UNIVERSITY MATRICULATION PAPERS

COMPULSORY PAPER

CALCUTTA

1928

1. *Either*, (i) If one angle of a triangle be greater than another, prove that the side opposite to the greater angle shall be greater than the side opposite to the less.

(ii) Hence deduce that the hypotenuse is the greatest side in a right-angled triangle.

Or, (i) Prove that the three interior angles of a triangle are together equal to two right angles.

(ii) If one angle of a triangle is equal to the sum of the other two, the triangle is right-angled.

2. (i) In equal circles, prove that the arcs which subtend equal angles whether at the centres or circumferences shall be equal.

(ii) Two equal circles intersect at A and B; and through A any straight line PAQ is drawn terminated by the circumferences. Show that BP = BQ.

3. Prove that the angle at the centre of a circle is double the angle at the circumference standing on the same arc.

1929

1. *Either*, (i) Prove that if two straight lines intersect, the vertically opposite angles are equal.

(ii) Two straight line AB and CD intersect at E. If the bisector of the angle AEC be produced, prove that it will bisect the angle BED.

Or, (i) Prove that two triangles are equal in every respect, if two angles and the adjacent side of one triangle are respectively equal to two angles and the adjacent side of the other.

(ii) The triangle ABC has the angles at B and C equal. Show that the bisectors of these equal angles terminated by the opposite sides are equal.

2. (i) Prove that if two tangents are drawn to a circle from an external point, they are equal.

(ii) If the circumference of a circle is divided into three equal arcs, the tangents drawn to the circle at the points of section form an equilateral triangle.

3. Draw a tangent to a given circle from an external point. (Traces of construction must be given, but no justification is required.)

1930

1. *Either*, (i) Prove that the three angles of a triangle are together equal to two right angles.

(ii) Find in *degrees* each angle of a regular polygon of five sides. Give reasons for your answer.

Or, (i) Prove that the area of a triangle is half the area of a parallelogram on the same base and of the same altitude.

(ii) ABCD is any parallelogram and O is any point within it. Show that the sum of the areas of the triangles AOB and COD is equal to half the area of the parallelogram.

2. *Either*, (i) Establish geometrically the algebraical formula $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

(ii) In a triangle ABC, AD is the perpendicular drawn to the base BC and O is the middle point of BC. Prove that the difference $AB^2 \sim AC^2 = 2\ BC.OD$.

Or, (i) Prove that the tangent at any point of a circle is at right angles to the radius drawn through the point.

(ii) The radius of a given circle is 1·5 inches. Prove that all points from which the tangents drawn to the circle are of constant length 2 inches, lie on a circle. Draw a diagram as accurately as you can.

3. Construct a triangle whose base will be 6 centimetres and the other two sides 3 and 5 centimetres respectively. Measure as accurately as possible the altitude of the triangle

[*Traces and statement of construction are required.*]

1931

1. *Either*, (i) If two angles of one triangle are respectively equal to two angles of another, and the side adjacent to the angles in one equal to the side adjacent to the equal angles in the other, prove that the two triangles are equal in all respects.

Or, (i) Prove that any two sides of a triangle are together greater than the third side.

(ii) Prove that the difference of any two sides of a triangle is less than the third side.

2. *Either*, (i) Prove the geometrical proposition corresponding to the algebraical formula $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$.

(ii) Prove that the square on a straight line is equal to four times the square on half the line.

Or, (i) Draw two tangents to a circle from an external point.

(ii) A quadrilateral is described touching a circle. Prove that the sum of any pair of opposite sides is equal to the sum of the other pair.

3. Construct a triangle, given the base, one side and the area.

1932

1. *Either*, (i) If one side of a triangle is produced prove that the exterior angle is greater than either of the interior opposite angles.

(ii) Show that it is impossible to draw three equal straight lines from a given point to a given straight line.

Or, (i) Prove that, if a straight line cuts two parallel straight lines, the corresponding angles are equal.

(ii) Prove that, it the three sides of one triangle are parallel to the three sides of another triangle, the corresponding angles are equal.

2. *Either*, (i) If a straight line drawn through the centre of a circle bisects a chord which does not pass through the centre, prove that it cuts the chord at right angles.

(ii) Show how to construct a circle of given radius to pass through two given points. When is this construction impossible ?

Or, (i) Prove that the tangent at any point of a circle and the radius through the point are perpendicular to one another.

(ii) Show how to draw a tangent to a given circle paralel to agiven straight line. How many such tangents are possible ?

3. (i) Construct a square on a given finite straight line. (Give only the traces of *all* your constructions, using a hard pencil, a straight ruler, and a pencil-compass only.)

(ii) Divide the area of a given square into parts from which two equal squares can be made up.

1933

1. *Either*, (i) Show that in a right-angled triangle the square on the hypotenuse is equal to the sum of the squares on the other two sides.

(ii) Prove that in an equilateral triangle four times the square on the perpendicular drawn from a vertex on the opposite side is equal to three times the square on any side.

Or, (i) Show that in an obtuse-angled triangle the square on the side subtending the obtuse angle is greater than the sum of the squares on the other two sides by twice the rectangle contained by one of those sides and the projection of the other side upon it.

(ii) Prove that a triangle whose sides are 2, 3 and 4 inches is an obtuse-angled triangle.

2. *Either*, (i) Show that equal chords of a circle are equidistant from the centre.

(ii) Find the locus of the mid-points of chords of constant length in a circle.

Or, (i) Show that there is only one circle which passes through three given points not in a straight line.

(ii) Prove that two different circles cannot cut each other at more than two points.

3. (i) Describe a parallelogram equal in area to a given triangle and having one of its angles equal to a given angle. (Traces only are required.)

(ii) Construct a rhombus equal in area to a given rectangle and having a side equal to a side of the rectangle. (Traces only are required.)

1934

1. *Either*, (i) If two sides of a triangle are unequal, prove that the greatest side has the greater angle opposite to it.

(ii) Show that the difference of any two sides of a triangle is less than the third side.

Or, (i) Show that the triangles on equal bases and of the same altitude are equal in area.

(ii) Show that the straight line joining the middle points of two sides of a triangle is parallel to the third side.

2 (i) Show that the angle which an arc of a circle subtends at the centre is double that which it subtends at any point on the remaining part of the circumference.

(ii) L is any point on the arc PM of a circle. The angles LPM and LMP are bisected by straight lines which intersect at O. Find the locus of the point O.

3. *Either*, (i) Draw a triangle equal in area to a given quadrilateral.

(ii) Bisect a quadrilateral by a straight line drawn through an angular point.

Or, (i) Construct a quadrilateral, given the lengths of the four sides and one angle. (Traces only are required.)

(ii) Bisect a triangle by a straight line drawn through a given point in one of its sides. (Traces only are required.)

1935

1. *Either*, (i) If the three sides of one triangle are respectively equal to the three sides of another, show that the two triangles are equal in all respects.

(ii) Show that the diagonals of a rhombus bisect one another at right angles.

Or, (i) Show that equal chords of a circle are equidistant from the centre.

(ii) Through a given point within a circle draw the least possible chord.

2. *Either*, (i) In an obtuse-angled triangle show that the square on the side opposite the obtuse angle is greater than the sum of the squares on the sides containing the obtuse angle by twice the rectangle contained by either of those sides and the projection of the other upon it.

(ii) In any triangle show that the sum of the squares on two sides is equal to twice the square on half the third side together with twice the square on the median which bisects the third side.

Or, (i) Show that if chords of a circle cut one another (inside the circle) the rectangle contained by he segments of one is equal to the rectangle contained by the segments of the other,

(ii) ABC is a triangle right-angled at C; from C a perpendicular CD is drawn to the hypotenuse; show that the square on CD is equal to the rectangle AD. BD.

3. (i) Describe a parallelogram that shall be equal to a given triangle and have one of its angles equal to a given angle.

(ii) Describe a rhombus equal to a given parallelogram and standing on the same base. When does the construction fail ?

1936

1. *Either*, (i) Show that the three angles of a triangle are together equal to two right angles.

(ii) Show that the angle contained by the bisectors of two adjacent angles of a quadrilateral is equal to half the sum of the remaining angles.

Or, (i) Show that triangles on the same base and between the same parallels are equal in area.

(ii) Show that the straight line which joins the middle points of the oblique sides of a trapezium is parallel to each of the parallel sides.

2. *Either*, (i) Show that the opposite angles of any quadrilateral inscribed in a circle are together equal to two right angles.

(ii) If O is the orthocentre of the triangle ABC, show that the angles BOC, BAC are supplementary.

Or, Show that the angles made by a tangent to a circle with a chord drawn from the point of contact are respectively equal to the angles in the alternate segments of the circle.

(ii) Two circles intersect at A and B; and through P, any point on the circumference of one of them, straight lines PAC, PBD are drawn to cut the other circle at C and D. Show that CD is parallel to the tangent at P.

3. (i) Construct a triangle having given two sides and an angle opposite to one of them. Explain the case where you get two solutions.

(ii) Trisect a triangle by straight lines drawn from a given point on one of its sides. (Traces only are required.)

1937

1. *Either*, (i) If two triangles have two angles of one equal to two angles of the other, each to each, and one side of the first equal to the corresponding side of the other, show that the triangles are equal in all respects.

(ii) If the bisector of the vertical angle of a triangle also bisects the base, show that the triangle is isosceles.

Or, (i) Show that chords of a circle which are equidistant from the centre are equal.

(ii) PQ is a fixed chord in a circle and AB is any diameter. Show that the sum of the perpendiculars let fall from A and B on PQ is constant if AB does not interest PQ inside the circle.

2. *Either*, (i) In every triangle the square on the side subtending an acute angle is equal to the sum of the squares on the sides containing that angle diminished by twice the rectangle contained by one of those sides and the projection of the other side upon it. Establish.

(ii) Show that three times the sum of the squares on the sides of a triangle is equal to four times the sum of the squares on the medians.

Or, (i) If two chords of a circle cut at a point within it, the rectangles contained by the segments are equal. Establish.

(ii) A semi-circle is described on AB as diameter, and any two chords AC, BD are drawn intersecting at P. Show that

$$AB^2 = AC.AP + BD.BP.$$

3. (i) Bisect a quadrilateral by a straight line drawn through an angular point. (State your construction and give a theoretical proof).

(ii) Construct a triangle having the base angles equal to two given angles and the perpendicular from the vertex on the base equal to a given line. (Traces only are required).

1938

1. *Either*, (i) If two triangles have two sides of the one equal to two sides of the other, each to each, and the included angles equal, show that the triangles are equal in all respects.

(ii) *ABC, DBC* are two isosceles triangles described on the same base *BC* but on opposite sides of it. *AD* meets *BC* in *E*. Prove that $BE = EC$.

Or, (iii) Show that the locus of a point which is equidistant from two fixed points is the perpendicular bisector of the straight line joining the two fixed points.

(iv) Straight lines are drawn from a fixed point to a given straight line. Find the locus of their middle points.

2. *Either*, (i) Show that the angle at the centre of a circle is double of the angle at the circumference standing on the same arc.

(ii) If two chords *AB* and *CD* of a circle intersect at a point *E* inside the circle, show that the angles subtended by *AC* and *BD* at the centre are together double of the angle *AEC*.

Or, (iii) Prove that in an obtuse-angled triangle the square on the side subtending the obtuse angle is equal to the sum of the squares on the sides containing the obtuse angle, together with twice the rectangle contained by one of those sides and the projection of the other side on it.

(iv) If *DE* is drawn parallel to the base *BC* of an isosceles triangle *ABC*, prove that the difference of the squares on *BE* and *CE* is equal to the rectangle contained by *BC* and *DE*.

3. (i) Construct a triangle having given two angles and a side opposite to one of them. (State your construction and give a theoretical proof.)

(ii) Construct a triangle having given the perimeter and two angles. (Traces only are required.)

DACCA

1934

1. Prove that if a straight line cuts two parallel lines, it makes (i) the alternate angles equal to one another, (ii) the exterior angle equal to the interior opposite angle on the same side of the cutting line. Hence deduce : (i) the exterior angle of a triangle is equal to the sum of the two interior opposite angles of the triangle ; (ii) three angles of a triangle are together equal to two right angles.

Or, Prove that the angle at the centre of a circle is double of an angle at the circumference standing on the same arc. Hence deduce that (i) angle in the same segment of a circle are equal, (ii) the angle in a semi-circle is a right angle.

2. (i) Prove that any two sides of a triangle are together greater than the third side.

(ii) Prove that the perimeter of a triangle is greater than the sum of its medians.

Or, (i) If two circles touch one another, the centres of the circles and their point of contact are collinear.

(ii) Find the locus of the centres of circles which touch two concentric circles.

3. (i) Prove that the straight line which joins the middle points of two sides of a triangle is parallel to the third side and divides the triangle in the ratio of 3 : 1.

(ii) Prove that the parallelogram obtained by joining the middle points of the sides of a quadrilateral is equal to half of the quadrilateral.

Or, Enunciate and prove the geometrical theorem corresponding to the algebraical identity $(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$, and hence prove that in any triangle the square on the side subtending an acute angle is equal to the sum of the squares on the sides containing that angle diminished by twice the rectangle contained by one of those sides and the projection of the other side upon it.

4. Construct a triangle having given two sides and an angle opposite to one of them.

Discuss the cases when there will be : (i) one solution, (ii) two solutions, and (iii) no solution.

[*Traces of construction should be left in each case.*]

Or, Reduce a quadrilateral to an equivalent triangle, and bisect it by a straight line through an angular point.

1935

1. Prove that the three angles of a triangle are together equal to two right angles. Hence deduce that all the interior angles of any rectilineal figure, together with four right angles, are equal to twice as many right angles as the figure has sides.

Or, (*a*) Prove that triangles on the same or equal bases and between the same parallels are equal in area.

(*b*) Prove that a parallelogram is divided by its diagonals into four triangles of equal area.

2. (*a*) If two triangles have two angles of one equal to two angles of the other, each to each, and any side of the first equal to the corresponding side of the other, the triangles are equal in all respects.

(*b*) Prove that any point on the bisector of an angle is equidistant from the arms of the angle.

Or, (*a*) Prove that the straight line which joins the middle points of two sides of a triangle is parallel to and half of the third side.

(*b*) Prove that the straight lines which join the middle points of the opposite sides of a quadrilateral, bisect one another.

3. (*a*) Prove that equal chords of a circle are equidistant from the centre and conversely, chords which are equidistant from the centre are equal.

(*b*) Find the locus of the middle points of equal chords of a circle.

Or, (*a*) If two circles touch one another, the centres and the point of contact are in one straight line.

(*b*) A and B are the centres of two fixed circles which touch internally. If P is the centre of any circle which touches the larger circle internally and the smaller externally, prove that $AP+BP$ is constant.

4. Give the construction for drawing a rectangle equal in area to a given rectilineal figure and reducing it to a square of equal area.

Or, (*a*) Draw a triangle equal in area to a given quadrilateral.

(*b*) A quadrilateral field ABCD has the following measurements : $AB=450$ metres, $BC=380$ metres, $CD=330$ metres, $AD=390$ metres and the diagonal $AC=660$ metres. Draw a plan (scale 1 c. m.$=50$ metres). Reduce your plan to an equivalent triangle and measure its base and altitude. Hence estimate the area of the field.